

PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
2004-2

Hasta ahora hemos trabajado con la representación gráfica de expresiones de la forma $ax + by + c = 0$ ó $y = mx + b$, cuya representación gráfica es una recta, sin embargo ésta situación no es la más común,. Analicemos la siguiente situación:

EJEMPLO 1: En una fábrica se tienen las siguientes tarifas para la venta de cierta línea de producción: Por la compra de 1 a 100 unidades el costo por unidad es de \$2800, por compras superiores a 100 e inferiores a 500 el precio por unidad se disminuye en un 15% y para compras superiores a 500 se hace un descuento a su valor unitario del 25%. Así mismo se sabe que la fábrica no puede atender pedidos superiores a 1000 unidades. Determine la(s) ecuación(es) que representan el costo de un pedido y represente gráficamente la situación

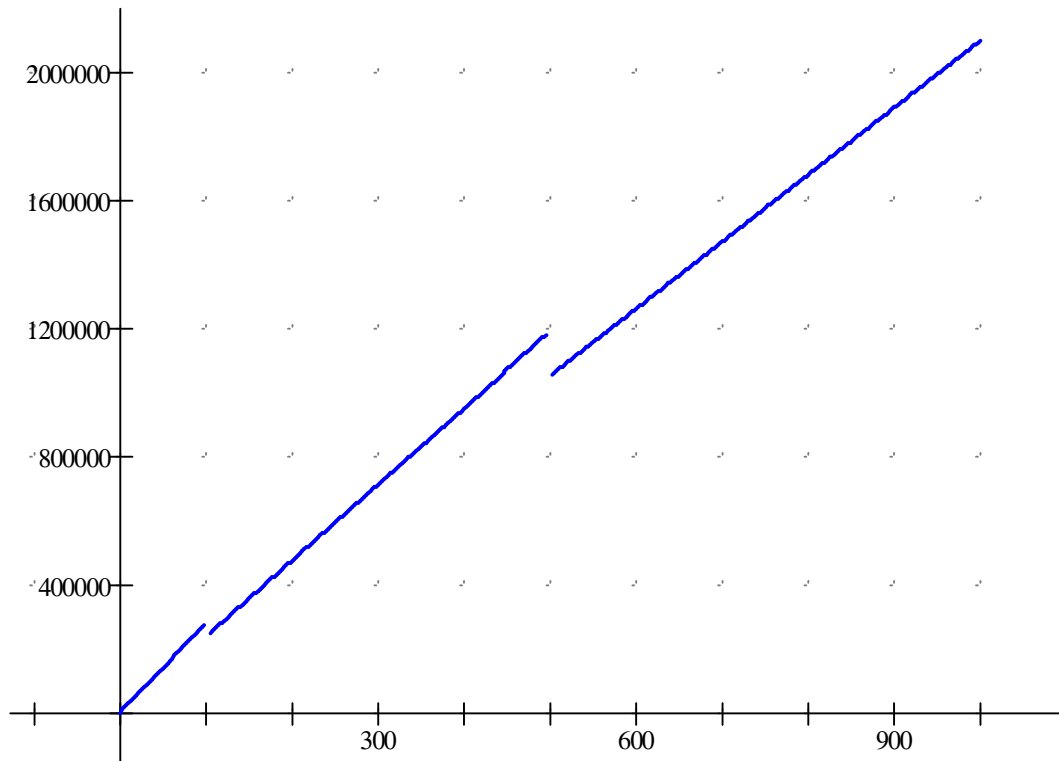
Solución Si llamamos x al número de unidades que pide un cliente y sea y el costo del pedido, se presentan las siguientes situaciones:

Si $x \leq 100$ el costo del pedido será $y = 2800x$

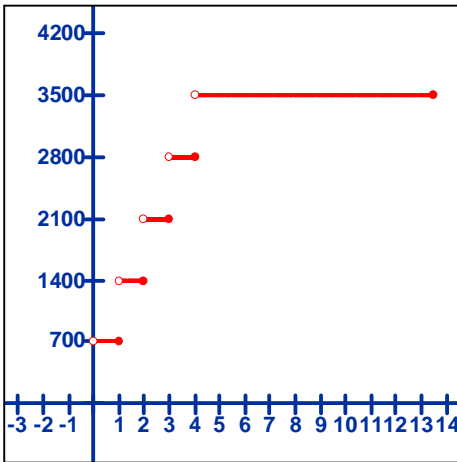
Si $100 < x < 500$ el costo del pedido será $y = \left(2800 - \frac{15}{100} 2800 \right) x$

Si $500 \leq x \leq 1000$ el costo del pedido será $y = \left(2800 - \frac{25}{100} 2800 \right) x$

Como vemos la situación anterior no está definida para todos los reales si no para el intervalo $[0 , 1000]$ y en este no tiene una sola ecuación que lo represente. Este tipo de situación recibe el nombre de **función definida a trozos**. Ahora observemos su representación gráfica



PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
2004-2



EJEMPLO El costo de parqueo diario en la E.C.I. para los estudiantes es de \$700 por hora o fracción, pero el máximo de pago en el día es de \$3.500. El servicio se presta de 6:30 a.m a 8:00 p.m. Represente la situación gráficamente y encuentre la ecuación.

Sea x el tiempo que está en el parqueadero un vehículo y sea $f(x)$ el valor que debe pagar el usuario.

Como se observa en la gráfica no hay una sola ecuación que represente la situación, pero si conocemos cada una de las ecuaciones que representan las rectas así: Para $x \in (0;1]$ $f(x)=700$, para $x \in (1;2]$ $f(x)=1.400$,

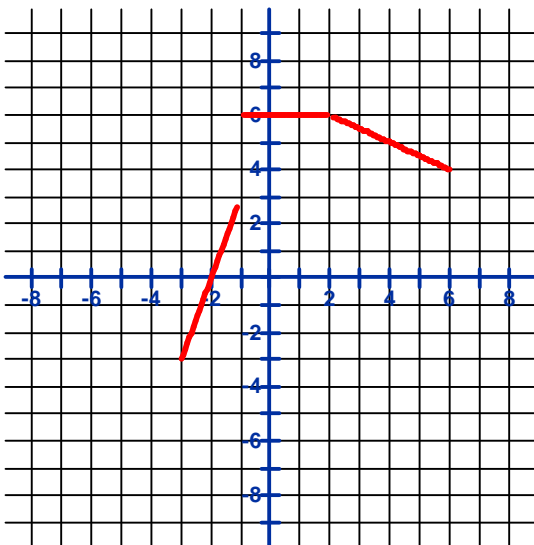
$x \in (2;3]$ $f(x)=2.100$, $x \in (3;4]$ $f(x)=2.800$, $x \in (4;13.5]$ $f(x)=3.500$, la cual se podrá escribir así:

$$f(x) = \begin{cases} 700 & x \in (0;1] \\ 1400 & x \in (1;2] \\ 2100 & x \in (2;3] \\ 2800 & x \in (3;4] \\ 3500 & x \in (4;13.5] \end{cases}$$

Esta situación también recibe el nombre de **función definida a trozos**.

EJERCICIOS

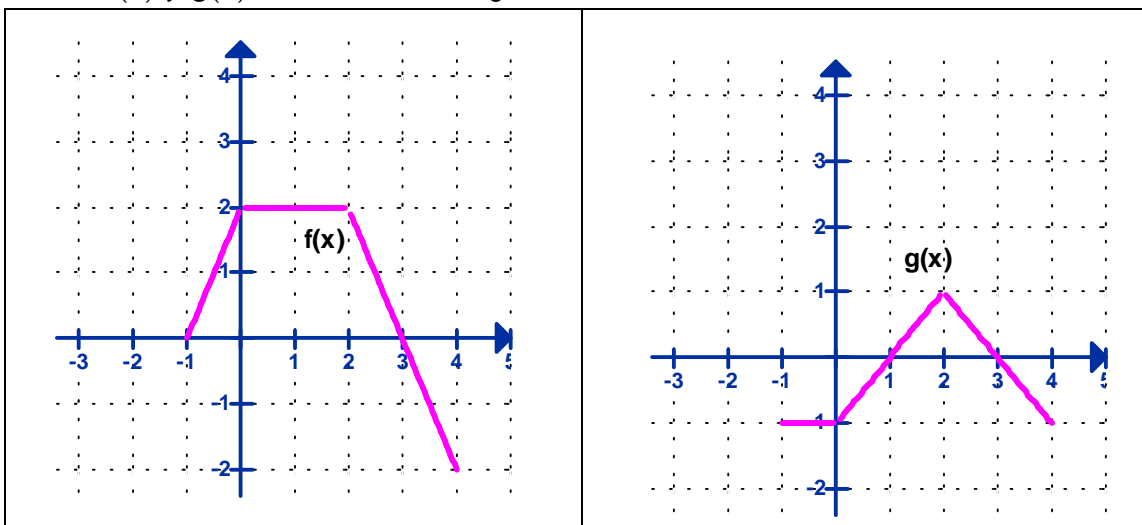
1. La gráfica representada en el plano cartesiano corresponde a una función definida a trozos. $f(x)$, sin buscar la ecuación correspondiente, dibuje:



- $f(x+2)$
- $f(x)+2$
- $-f(x)$
- $\frac{1}{2}f(x)$
- $f(-x)$
- Determine el valor de $g(-2)$ si $g(x) = 2 + f(x+2)$

2. Haga la gráfica de $g(x) = \{x\}$, si $\{x\}$ es la distancia de un número real x al entero más próximo.

3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones siguientes



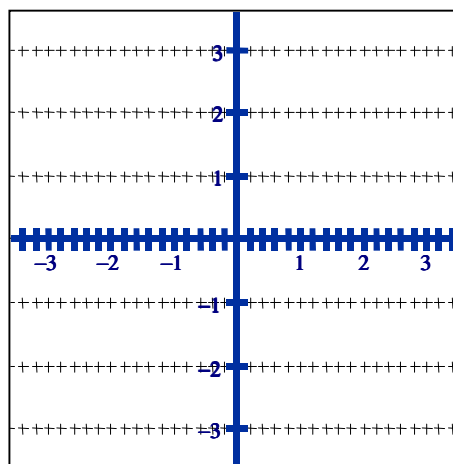
Determine:

$f(-1)$	$f(2)$	$g(-1)$	$g(2)$
$(f + g)(-1)$		$(f + g)(2)$	
$(f - g)(-1)$		$(f - g)(2)$	
Haga la gráfica de $(f + g)(x)$		Haga la gráfica de $(f - g)(x)$	
Dominio y Rango de $(f + g)(x)$		Dominio y Rango de $(f - g)(x)$	

Ahora entraremos a trabajar con algunas funciones definidas a trozos que se presentan con frecuencia, para cada una de ellas llene la tabla de valores, haga la gráfica en el plano cartesiano y escriba la función como una función definida a trozos

1. Si se define una función como el mayor entero menor o igual a x

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-3		0,2	
-2,6		0,6	
-2		0,8	
-1,8		1	
-1,6		1,2	
-1,2		1,6	
-1		1,8	
-0,8		2	
-0,6		2,6	
-0,2		3	
0			

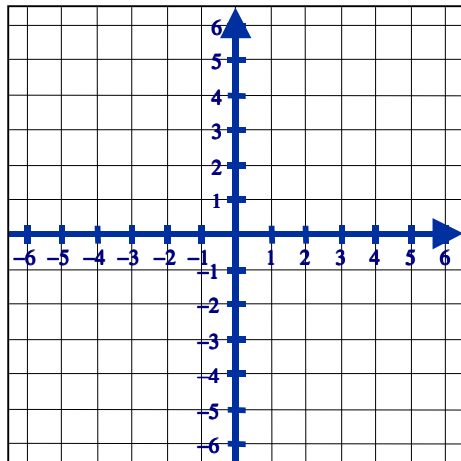
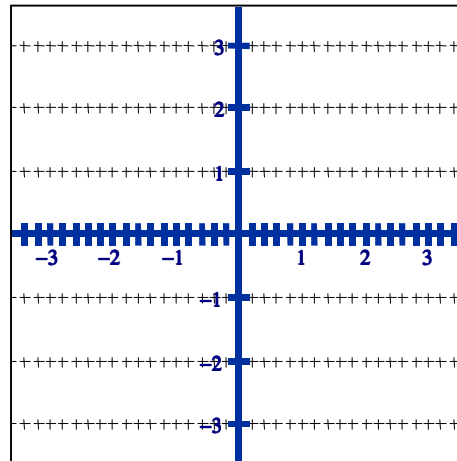


Esta función es conocida también como la función redondear hacia abajo, floor y es escrita $f(x) = \lfloor x \rfloor \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor, f(x) = \text{floor}(x)$

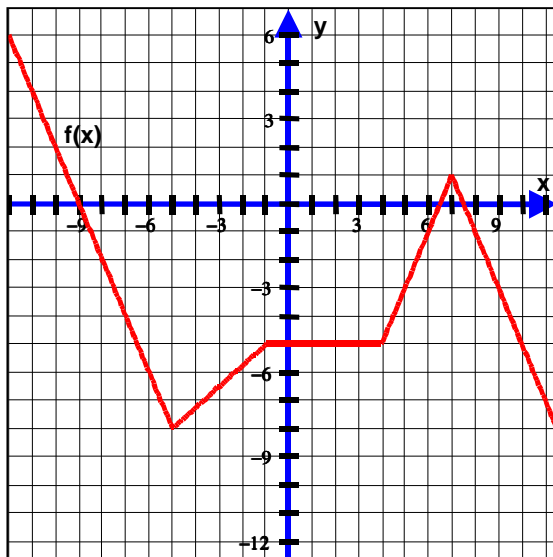
PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

2004-2

x	f(x)	x	f(x)
-3		0,2	
-2,6		0,6	
-2		0,8	
-1,8		1	
-1,6		1,2	
-1,2		1,6	
-1		1,8	
-0,8		2	
-0,6		2,6	
-0,2		3	
0			

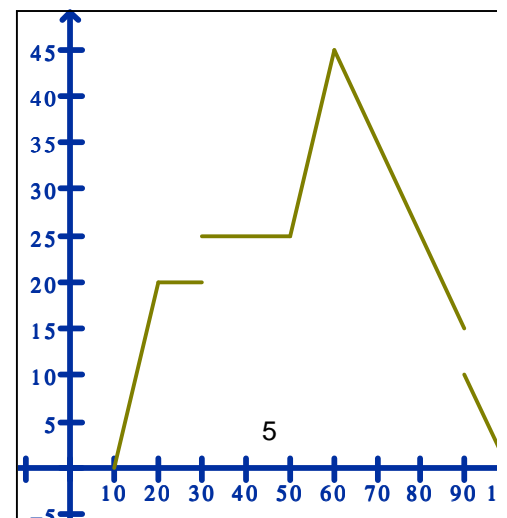


6. Sea $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ -x+1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$



7. Determine la expresión $f(x)$ de la función a trozos de la gráfica, con su respectivo dominio.

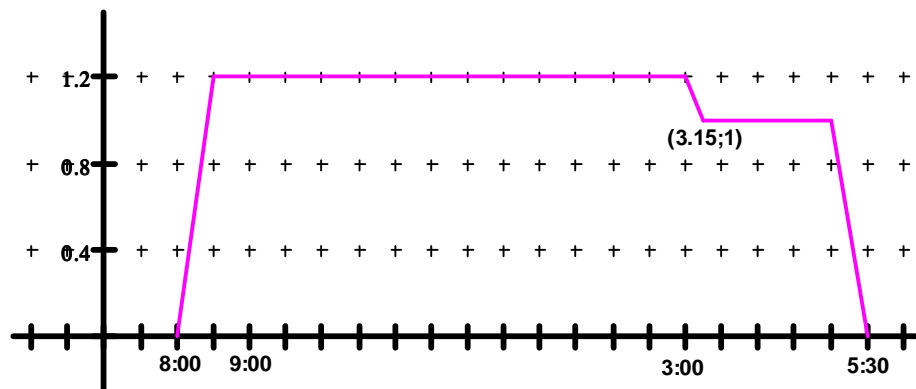
8. La figura muestra el nivel del agua en la tina del señor Galvis en función del tiempo. El señor Galvis puede abrir o cerrar el grifo,



PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
2004-2

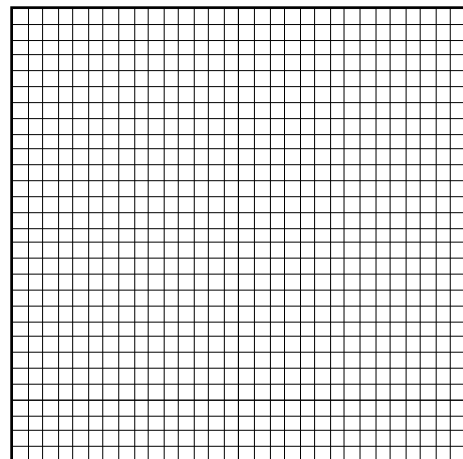
puede entrar o salir de la tina y puede abrir o cerrar el desagüe. Usted debe describir en palabras lo que muestra la figura, indicando que unidades se están representando en los ejes y hallar la expresión simbólica de la función mostrada. *

9. Piense en lo que hizo ésta mañana. Dibuje la distancia entre usted y la cama en función del tiempo para la primera hora después de levantarse"
10. En el gráfico el eje vertical representa la cantidad de kilómetros a los que se encuentra María Consuelo de su casa en un tiempo t . Diariamente María Consuelo va a la ECI a dictar clase, luego va a su empresa particular y regresa a su casa.
 - a. Qué tan lejos está la ECI de la casa de María Consuelo?
 - b. Qué tiempo gasta María Consuelo para ir a la ECI
 - c. ¿Cuál es la pendiente del segmento de recta $(3,12)$ $(3,15;1)$ y qué representa?
 - d. Si se sabe que María Consuelo vive en el costado occidental de la autopista norte, en que zona está su casa?
 - e. ¿Qué método de transporte pudo utilizar de la casa a la ECI?



11. En Semana Santa la familia de Pedro Pataquiva irá de vacaciones a la costa en carro. El sitio de destino se encuentra a 800 Km de Bogotá y viajará a una velocidad promedio de 80Km/h. Represente gráficamente el recorrido. En el eje horizontal represente el tiempo de viaje, en el eje vertical, el espacio recorrido.

- a. Ubique en el plano cartesiano los puntos que corresponden a la distancia recorrida para 1, 2, 4 y 8. horas . indicando la escala utilizada en cada eje



PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

2004-2

- b. La razón entre la distancia y el tiempo es _____ y equivale a _____
- c. Haga la gráfica que represente todo el viaje.
- d. Determine la ecuación que representa la distancia en función del tiempo y llámela $f(x)$
- e. Determine el dominio y el rango de la función que representa exactamente el enunciado del problema
- f. Que significado tiene $f(3,5)$
- g. Determine $f(7)$ $f(-1)$
- h. Determine para qué valor de x la distancia es de 650 Km
- i. El punto $(2.5,200)$ pertenece a $f(x)$, justifíquelo algebraicamente
- j. Al modificar el valor de la velocidad a 40km/h, entre la tercera y la quinta hora Cómo se modifica la gráfica de la función. Representéla en el mismo plano cartesiano
12. El costo de publicación de cada ejemplar de la revista semanal "HEY" es de \$3500. Los ingresos por ventas son de \$3900 por ejemplar más los ingresos por publicidad que son el 20% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 2000 ejemplares.
- Escriba la función de utilidad
 - ¿Cuáles serán las utilidades si se venden 1800 ejemplares?
 - ¿Cuántos ejemplares deberán venderse para obtener unas utilidades semanales de al menos \$1' 000.000?
13. Una agencia de viajes organiza una excursión. El viaje tiene un valor de \$100.000 por persona si se reúnen 30 ó menos, si se superan las 30 personas hacen una rebaja del 10% a cada persona.
- Calcule la función que representa el ingreso total de la agencia en función del número de viajeros y haga la gráfica
 - Qué número de personas deben ir en la excursión para que el ingreso de la agencia sea máximo.
 - Establezca el dominio de la función
14. Una empresa de taxis en Bogotá cobra \$2000 por el primer kilómetro recorrido ó fracción y \$150 más por cada 100 metros o fracción de recorrido adicional. Expresar el costo C (en pesos) de un recorrido, como una función de la distancia x (en kilómetros)

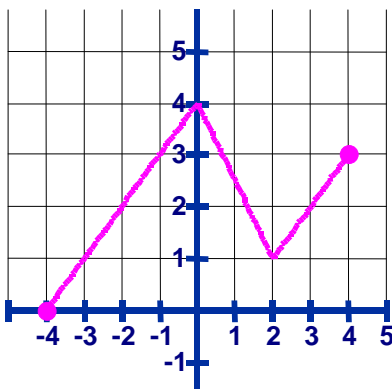
PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
2004-2

15. El índice de contaminación atmosférica en cierta ciudad varía durante el día de la siguiente manera:

$$p(t) = \begin{cases} 2 + 4t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 6 + 2t & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ 14 & \text{si } 4 \leq t < 12 \\ 50 - 3t & \text{si } 12 \leq t < 16 \end{cases}$$

Aquí t es el tiempo en horas, con $t = 0$ y que corresponde a las 6:00 am y $t = 16$ que corresponde a las 10:00 pm.

- Haga la gráfica de ésta función.
- Cuáles son los niveles de contaminación a las 8:00 am, 12:00 del día, 6:00 pm y 8:00 p.m



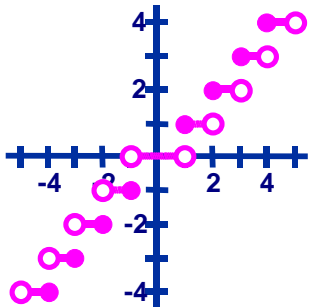
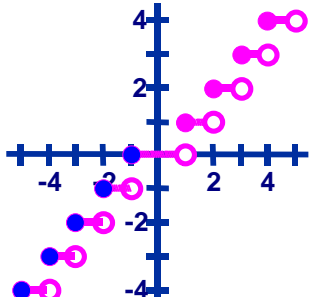
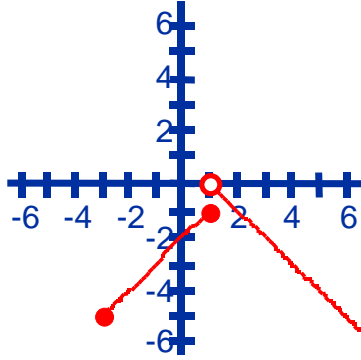
16. Para la siguiente gráfica:

- Encuentre la función que la genera
- Dominio: _____
- Rango: _____
- Intervalos de crecimiento: _____
- Intervalos de decrecimiento: _____
- Coordenadas Punto mínimo: _____
- Coordenadas Punto máximo: _____
- Es función uno a uno? _____
- Por qué? _____
- Escriba la **ecuación** que representa el siguiente texto: "La función evaluada en 2 es 1"
- Escriba la **ecuación** que representa el siguiente texto: "La función evaluada en x es 2"
- Escriba la **ecuación** que representa el siguiente texto: "La imagen de 4 es 3" _____

RESPUESTAS

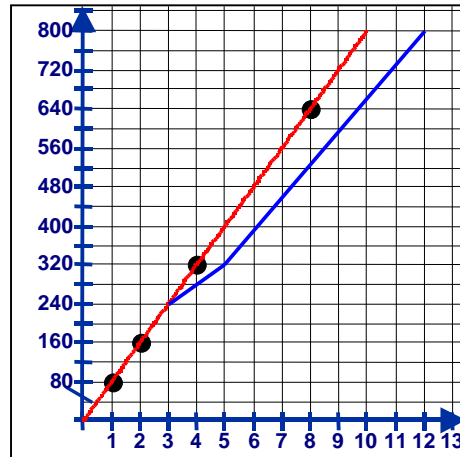
<p>1. $f(x) = \lfloor x \rfloor$</p>	<p>2. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$</p>	<p>3. $f(x) = \text{Sgn}(x)$</p>
---	---	---

PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
2004-2

<p>4. $f(x) = \text{Parte entera de } x$</p> 	<p>5. $f(x) = \text{Menor entero mayor que } x$</p> 	<p>6.</p> 
<p>7. $f(x) = \begin{cases} -2x - 18 & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{3}{4}x - \frac{17}{4} & \text{si } -5 < x \leq -1 \\ -5 & \text{si } -1 < x \leq 4 \\ 2x - 13 & \text{si } 4 < x \leq 7 \\ -2x + 15 & \text{si } x > 7 \end{cases}$</p>	<p>8. 9. 10.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1,2 Km 30 minutos $m = \frac{0,2Km}{0,15h} = -\frac{4}{3}$ Barrio Mirandela A pie pues llevaba una velocidad promedio de 2,4 K/hora 	<p>11.</p> <ol style="list-style-type: none"> La escala utilizada para el eje x es de una unidad corresponde a una hora y en el eje y cada unidad equivale a 40 kilómetros recorridos. La razón entre la distancia y el tiempo es CONSTANTE y equivale a VELOCIDAD. Haga la gráfica que represente todo el viaje.

PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS
2004-2

c. Ver gráfica roja



d. $f(x) = 80x$

e. **Dominio** En notación de conjunto $\{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$ ó en notación de intervalo $[0;10]$

Rango En notación de conjunto $\{x \mid 0 \leq x \leq 800\}$ ó en notación de intervalo $[0;800]$

f. La distancia recorrida al cabo de 3,5 horas

g. $f(7) = 560$ kilómetros $f(-1)$ no tiene sentido pues no puedo llevar -1 hora de tiempo

h. Algebraicamente $f(x) = 650 \Leftrightarrow 80x = 650 \Leftrightarrow x = 8.125$ horas

i. $f(2,5) = 80(2,5) = 200$, entonces si pertenece

j. Observar que entre 0 y 3 horas la gráfica es la misma y a partir de 3 cambia ver gráfica azul.

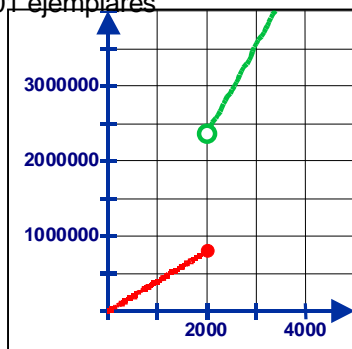
12.

a. La Utilidad = Ingresos – Costos

$$U(x) = \begin{cases} 3900x - 3500x & \text{si } x \leq 2000 \\ 3900x + \frac{20}{100}(3900x) - 3500x & \text{si } x > 2000 \end{cases}$$

b. Si se venden 1800 ejemplares se tiene $U(1800) = 3900(1800) - 3500(1800) = \720.000

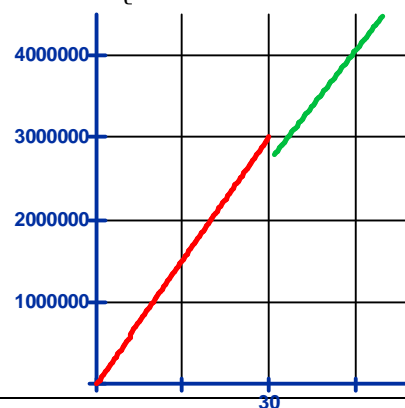
c. Observemos la gráfica Debe venderse 2.001 ejemplares



13.

a. Calcule la función que representa el ingreso total de la agencia en función del número de viajeros y haga la gráfica.

$$I(x) = \begin{cases} 100.000x & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 90.000x & \text{si } x > 30 \end{cases}$$



PRECÁLCULO FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

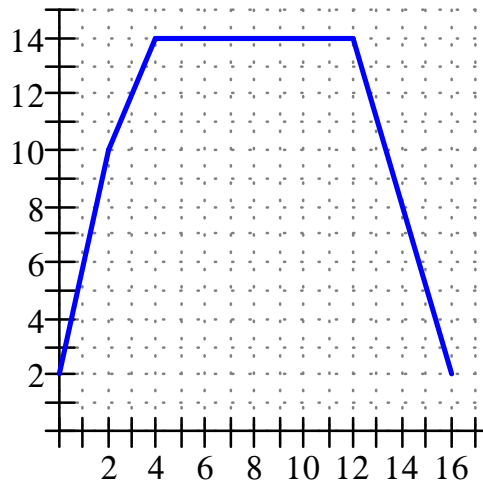
2004-2

14.

$$C(x) = \begin{cases} 2.000 & 0 \leq x \leq 1.000 \\ 2.150 & 1.000 < x \leq 1.100 \\ 2.300 & 1.100 < x \leq 1.200 \\ 2.450 & 1.200 < x \leq 1.300 \\ \cdot & \\ \cdot & \end{cases}$$

15.

a.



b. 10, 14, 14, 8

16.

a. $f(x) = \begin{cases} x+4 & x \in [-4, 0] \\ -\frac{3}{2}x+4 & x \in (0, 2] \\ x-1 & x \in (2, 4] \end{cases}$

b. $[-4, 4]$

c. $[0, 4]$

d. $(-4, 0) \cup (2, 4)$

e. $(0, 2)$

f. $(-4, 0)$

g. $(0, 4)$

h. No

i.

j. $f(2) = 1$

k. $f(x) = 2$

l. $f(4) = 3$