

Este documento es tomado de :

<http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/conjuntos.htm>

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Rama de las matemáticas a las que el matemático Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor es el padre de la Teoría de Conjuntos, dio su primer tratamiento formal en 1870. El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemáticas, incluso más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. En su forma explícita, los principios y terminología de los conjuntos se utilizan para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y para explicar conceptos abstractos como el infinito.

En el año 1874, apareció el primer trabajo revolucionario de Cantor sobre la Teoría de conjuntos.

Ir a la biografía de Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor

DEFINICIONES

Sabemos que la palabra conjunto implica la idea de una colección de objetos que se caracterizan en algo común. En matemática tiene el mismo significado, sólo que a estos objetos se les llama elementos o miembros del conjunto.

La noción simple de una colección o conjunto de objetos es fundamental en la estructura básica de las matemáticas y fue Georg Cantor, en los años 1870 quien primero llamó la atención de los matemáticos a este respecto.

No puede darse una definición satisfactoria de un conjunto en términos de conceptos simples, por lo tanto la palabra "CONJUNTO" debe aceptarse lógicamente como un término no definido.

Un conjunto es una colección bien definida de objetos de cualquier clase.

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Hay dos formas de determinar conjuntos ó Forma Tabular

Se dice que un conjunto es determinado por extensión (o enumeración), cuando se da una lista que comprende a todos los elementos del conjunto y sólo a ellos.

$A = \{ a, e, i, o, u \}$ $B = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$ $C = \{ c, , , j, u, t, s \}$

En un conjunto determinado por extensión no se repite un mismo elemento.

Por comprensión ó Forma Constructiva

Se dice que un conjunto es determinado por comprensión, cuando se da una propiedad que la cumpla en todos los elementos del conjunto y sólo a ellos.

Ejemplos

$A = \{ x/x \text{ es una vocal} \}$ $B = \{ x/x \text{ es un número par menor que } 10 \}$

$C = \{ x/x \text{ es una letra de la palabra conjuntos} \}$

Vamos a mostrarte un cuadro comparativo de determinación de conjuntos

Por Extensión

Por Comprensión

$A = \{ a, e, i, o, u \}$

$A = \{ x/x \text{ es una vocal} \}$

$B = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$

$B = \{ x/x \text{ es un número par menor que } 10 \}$

$C = \{ c, , , j, u, t, s \}$

$C = \{ x/x \text{ es una letra de la palabra conjuntos} \}$

$D = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

$D = \{ x/x \text{ es un número impar menor que } 10 \}$

$E = \{ b, c, d, f, g, h, j, . . . \}$

$E = \{ x/x \text{ es una consonante} \}$

CONJUNTOS FINITOS

Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. En caso contrario, el conjunto es infinito.

- $M = \{ x / x \text{ es un río de la tierra} \}$ Conjunto finito
 $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots \}$ Conjunto infinito
 $P = \{ x / x \text{ es un país de la tierra} \}$ Conjunto finito
 $V = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \dots \}$ Conjunto infinito

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales cuando ambos tienen los mismos elementos, es decir si cada elemento de A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. La igualdad se denota $A = B$.

En la igualdad, el orden de los elementos de cada conjunto no importa.

Ejemplos

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 1, 2\}$ $A = B$
 $C = \{1, 2, 3, 3, 4, 1\}$ $D = \{1, 2, 2, 3, 4, 4\}$ $C = D$
 $E = \{\text{vocal de la palabra mundo}\}$ $F = \{u, o\}$ $E = F$

CONJUNTO VACÍO

Es un conjunto que carece de elementos. Se suele llamarle conjunto nulo, y se le denota por el símbolo \emptyset o $\{\}$.

Ejemplos

- $A = \{\text{Los perros que vuelan}\}$ $A = \{\}$ $A = \emptyset$
 $B = \{x / x \text{ es un mes que tiene 53 días}\}$ $B = \{\}$ $B = \emptyset$
 $C = \{x / x3 = 8 \text{ y } x \text{ es impar}\}$ $C = \{\}$ $C = \emptyset$
 $D = \{x / x \text{ es un día de 90 horas}\}$ $D = \{\}$ $D = \emptyset$

CONJUNTO UNITARIO

Es todo conjunto que está formado por un sólo y único elemento.

Ejemplos:

- $A = \{5\}$ $B = \{\text{números pares entre 6 y 10}\} = \{8\}$
 $C = \{\text{la capital del Perú}\} = \{\text{Lima}\}$ $D = \{x / 2x = 6\} = \{3\}$

CONJUNTO UNIVERSAL

Es el conjunto que contiene a todos los elementos del discurso. Es un término relativo. Se le denota por la letra U.

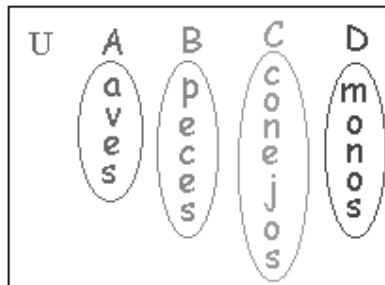
Ejemplos:

Sean los conjuntos:

- $A = \{\text{aves}\}$ $B = \{\text{peces}\}$ $C = \{\text{conejos}\}$ $D = \{\text{monos}\}$

Existe otro conjunto que incluye a los conjuntos A, B, C y D. Es

$$U = \{\text{animales}\}$$



Gráficamente se representa por un rectángulo tal como se observa a continuación.

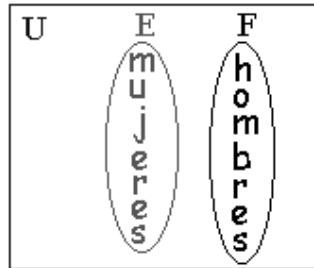
Sean los conjuntos:

$$E = \{ \text{mujeres} \} \quad F = \{ \text{hombres} \}$$

Existe otro conjunto que incluye a los conjuntos E y F. Es

$$U = \{ \text{seres humanos} \}$$

Gráficamente se representa por un rectángulo tal como se observa a continuación.



CONJUNTO POTENCIA

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto M se llama Conjunto Potencia de M . Se le denota como 2^M .

Ejemplos:

a. $M = \{ 1, 2 \}$ El conjunto M tiene 2 elementos

$$2^M = \{ \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset \} \text{ entonces } 2^2 = 4 \text{ elementos}$$

b. $M = \{ 1, 2, 3 \}$ El conjunto M tiene 3 elementos

$$2^M = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset \} \text{ entonces } 2^3 = 8 \text{ elementos}$$

Si un conjunto M es finito con "n" elementos, entonces su conjunto potencia 2^M tendrá 2^n elementos.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Si dos conjuntos A y B no tienen ningún elemento común entonces A y B son disjuntos.

Ejemplos

Conjuntos disjuntos

$$A = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$B = \{ 1, 3, 5 \}$$

A y B son disjuntos.

Conjuntos no disjuntos

$$M = \{ o, p, q, r, s \}$$

$$N = \{ s, t, v, u \}$$

M y N no son disjuntos.

$$C = \{ x/x \text{ es una letra del alfabeto} \}$$

$$D = \{ x/x \text{ es un número} \}$$

C y D son disjuntos

$$P = \{ x/x \text{ es una letra de la palabra aritmética} \}$$

$$Q = \{ x/x \text{ es una letra de la palabra algebra} \}$$

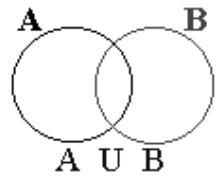
P y Q no son disjuntos

DIAGRAMA DE VENN

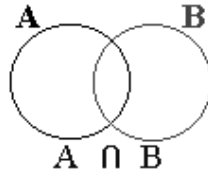
A cada conjunto se le considera encerrado dentro de una curva (plana) cerrada. Los elementos del conjunto considerado pueden ser específicamente dibujados o pueden quedar (implícitamente) sobreentendidos. Los diagramas son empleados, para representar tanto a los conjuntos como a sus operaciones, y constituyen una poderosa herramienta geométrica, desprovista de validez lógica.

A continuación representaremos algunos conjuntos y verificaremos algunas igualdades (las intersecciones de dos o más conjuntos quedan caracterizados por el rayado múltiple).

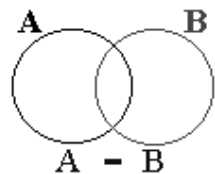
El gráfico es la representación de la unión



El gráfico es la representación de la intersección



El gráfico es la representación de la diferencia



UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota: $A \cup B$. La unión de conjuntos se define como:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

En forma gráfica:



Cuando no tienen elementos comunes

Cuando tienen algunos elementos comunes pertenecen al otro

Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen al otro

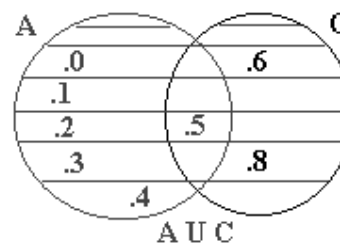
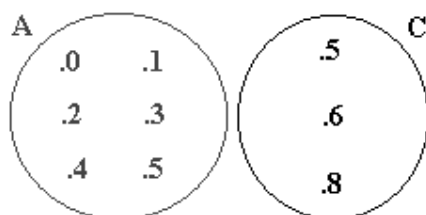
Ejemplos

Dados los conjuntos: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ y $C = \{5, 6, 8\}$, efectuar y construir los diagramas respectivos:

- a) $A \cup C$ b) $B \cup C$ c) $A \cup B$

Tenemos:

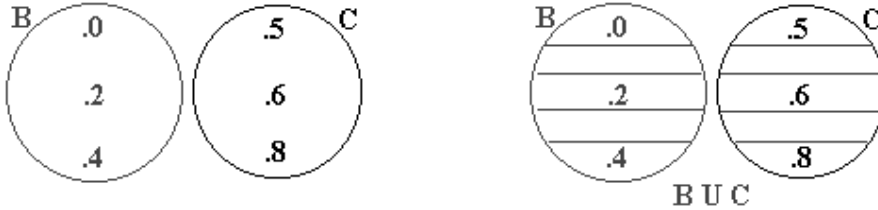
a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{5, 6, 8\}$ $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$



Representación gráfica de la unión de conjuntos A y C

b) $B = \{0, 2, 4\}$ y $C = \{5, 6, 8\}$

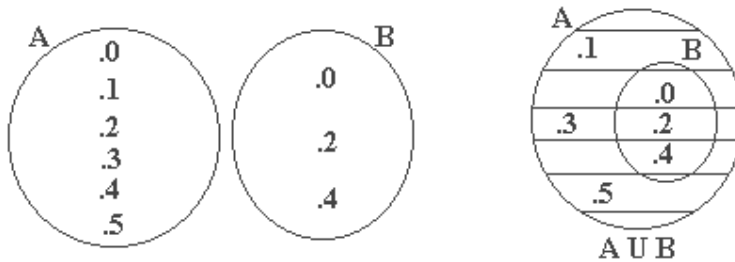
$B \cup C = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$



Representación gráfica de la unión de conjuntos B y C

c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 2, 4\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

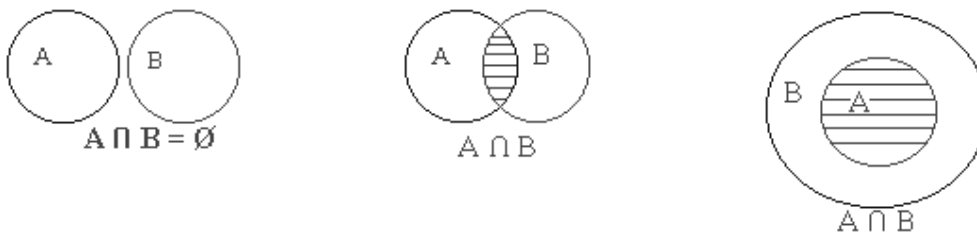


Representación gráfica de la unión de conjuntos A y B

INTERSECCIÓN DE CONJUNTO

Se define la intersección de dos conjuntos A y B al conjunto de elementos que son comunes a A y B. Se denota por $A \cap B$, que se lee: A intersección B. La intersección de A y B también se puede definir:

$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$ y mediante un diagrama de Venn-Euler:



Cuando tienen elementos comunes

Cuando no tienen elementos comunes

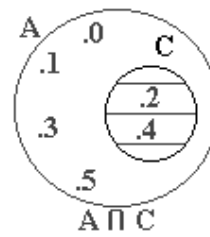
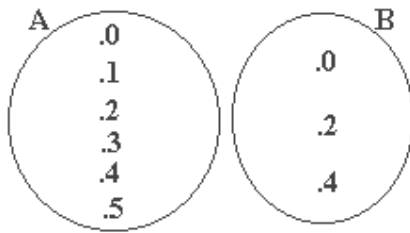
Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto

1. Dados los conjuntos: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 4\}$, efectuar y construir los diagramas respectivos:

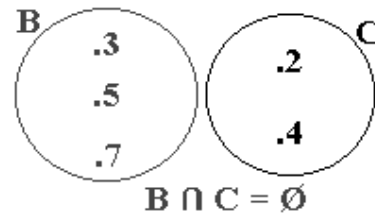
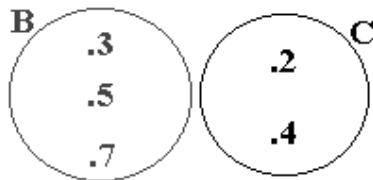
- a) $A \cap C$ b) $B \cap C$ c) $A \cap B$

Tenemos:

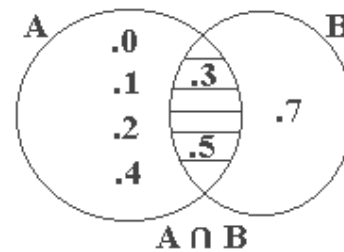
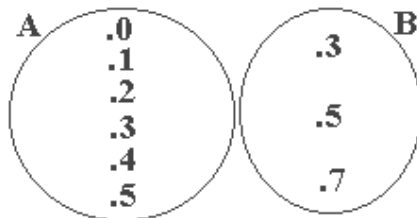
a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4\}$



b) $B = \{3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 4\}$



c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 5, 7\}$



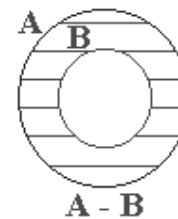
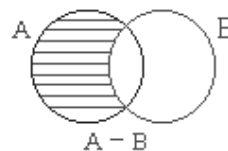
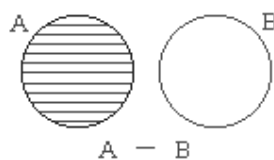
DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Se denomina diferencia de dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos de A pero que no pertenecen a B .

La diferencia se denota por: $A - B$ que se lee: A diferencia B o A menos B . Se define la diferencia de dos conjuntos también como:

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Mediante un diagrama de Venn - Euler:



Quando no tienen elementos comunes

Quando tienen elementos comunes

Quando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto

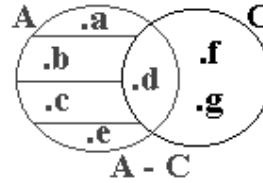
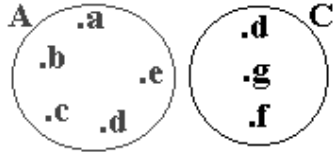
1. Dados los conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e\}$ y $C = \{d, f, g\}$, efectuar y construir los diagramas respectivos:

- a) $A - C$ b) $B - C$ c) $A - B$

Tenemos:

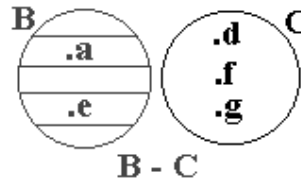
a) $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $C = \{d, f, g\}$

$$A - C = \{a, b, c, e\}$$



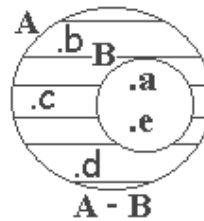
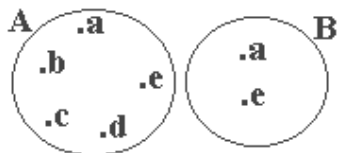
b) $B = \{a, e\}$ y $C = \{d, f, g\}$
 y

$$B - C = \{a, e\}$$



c) $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e\}$

$$A - B = \{b, c, d\}$$



COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Si un conjunto A es subconjunto de otro conjunto universal U , al conjunto A' formado por todos los elementos de U pero no de A , se llama complemento de A con respecto a U . Simbólicamente se expresa:

$$A' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplos

a) Sean $U = \{m, a, r, t, e\}$

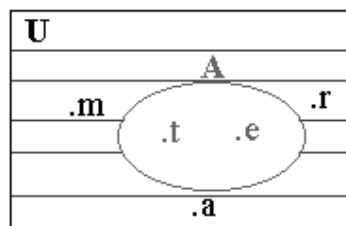
y

$A = \{t, e\}$

Su complemento de A es:

$$A' = \{m, a, r\}$$

En forma gráfica:



b) Sean $U = \{ \text{letras de la palabra aritmética} \}$ y $B = \{ \text{vocales de la palabra vida} \}$
 Determinado por extensión tenemos

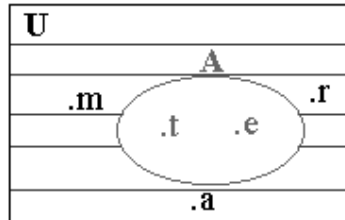
$$U = \{ a, r, i, t, m, e, c \}$$

$$B = \{ i, a \}$$

Su complemento de B es:

$$B' = \{ r, t, m, e, c \}$$

En forma gráfica:



EJERCICIOS DE CONJUNTOS

Preguntas

- 1) Cuáles son los elementos de:
 - a) El conjunto de los días de la semana
 - b) El conjunto de las estaciones del año
 - c) Los números impares menores de 11
 - d) Los números pares mayor que 10 y menor que 20
 - e) Los números primos menores de 15

- 2) Colocar V ó F según lo afirmado sean verdadero o falso
 - a) $6 \in \{ 2, 4, 5, 6, 9 \}$
 - b) $y \in \{ o, p, q, x \}$
 - c) $x \notin \{ o, p, q, y \}$
 - d) Perú $\in \{ \text{países de Europa} \}$
 - e) Amazonas $\notin \{ \text{rios de América} \}$

- 3) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, unitarios, finitos, infinitos?
 - a) $A = \{ x / x \text{ es día de la semana} \}$
 - b) $B = \{ \text{vocales de la palabra vals} \}$
 - c) $C = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \dots \}$
 - d) $D = \{ x / x \text{ es un habitante de la luna} \}$
 - e) $E = \{ x \in \mathbb{N} / x < 15 \}$
 - f) $F = \{ x \in \mathbb{N} / 5 < x < 5 \}$
 - g) $G = \{ x \in \mathbb{N} / x > 15 \}$
 - h) $H = \{ x \in \mathbb{N} / x = x \}$
 - i) $I = \{ x / x \text{ es presidente del Océano Pacífico} \}$
 - j) $J = \{ x / x \text{ es número de cabellos total de los habitantes del Perú} \}$

Examen de Teoría de Conjuntos

Haga un click en el círculo de la alternativa correcta

- 1) El padre de la Teoría de Conjuntos fue
 - Cantor
 - Kronecker
 - Gauss

- 2) Un conjunto es una colección ...
 - de objetos no definidos

bien definida de objetos de cualquier clase
de términos no definido

3) ¿Cuántas formas hay para determinar un conjunto?

- Hay una forma
- Hay cuatro formas
- Hay dos formas

4) $A = \{x/x \text{ es país fronterizo con Perú}\}$ El conjunto esta por ...

- Comprensión
- Extensión
- Tabular

5) $B = \{x/x \text{ es una vocal de Internet}\}$ El conjunto es ...

- Unitario.
- Infinito.
- Finito.

6) Los que representan conjuntos disjuntos son ...

- $A = \{e, m, a, i, l\}$ y $B = \{c, o, r, e\}$
- $C = \{3, 6, 9\}$ y $D = \{4, 8, 12\}$
- $E = \{2, 4, 8\}$ y $F = \{3, 4, 5\}$

7) La unión de conjuntos de $A = \{c, h, a, t\}$ y $B = \{c, h, a, r, l\}$

- $A \cup B = \{c, h, a\}$
- $A \cup B = \{a, c, h, l, r, t\}$
- $A \cup B = \{l, r, t\}$

8) La intersección de conjuntos de $A = \{n, e, w, s\}$ y $B = \{n, o, t, i, c, a\}$

- Es un conjunto vacío
- Es un conjunto unitario
- Es un conjunto universal

9) La diferencia de conjuntos de $A = \{c, h, a, t\}$ y $B = \{c, h, a, r, l\}$

- $A - B = \{c, h, a\}$
- $A - B = \{r, l\}$
- $A - B = \{t\}$

10) Si $U = \{\text{letras de la palabra evaluación}\}$ y $A = \{\text{vocal de la palabra internet}\}$. El complemento de A es

- $A' = \{n, t, r\}$
- $A' = \{a, c, l, n, o, u, v\}$
- $A' = \{v, a, l, u, c\}$