ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA

Precálculo 2003-2 MATERIAL ADICIONAL

EXPONENTES Y LOGARITMOS

1. Simplificar las siguientes expresiones.

a. $\left(\dfrac{-27^{3}(-3)^{5}(-81)^{2}}{(729)^{4}\left(2^{5}-5\right)}\right)^{-\frac{3}{2}}$

b. $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4}-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}+5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}-4\left(\dfrac{1}{2}\right)+1$

c. $\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{5}\right)$

d. $-5^{2}(-5)^{2}(-5)^{3}$

e. $\dfrac{4^{-2}+4^{-1}}{4^{2}}$

f. $\dfrac{1}{2}\sqrt{12}-\dfrac{1}{3}\sqrt{18}+\dfrac{3}{4}\sqrt{48}+\dfrac{1}{6}\sqrt{72}$

g. $\boldsymbol{xy}^{-\frac{2}{3}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{2}\left(\boldsymbol{x}^{-1}+\boldsymbol{y}^{-1}\right)^{-2}\left(\boldsymbol{y}^{5}\boldsymbol{x}^{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{xy}^{-\frac{1}{8}}\boldsymbol{x}^{\frac{2}{5}}\right)^{0}$

h.

2. Simplificar y escribir como un producto de potencias:

$(-2)^{5}\times(-3)^{6}\times(-2)^{-7}\times(-3)^{-5}\times(-6)^{7}\times(-4)^{-5}$

3. Escribir en forma exponencial

a. $log_{5}\ 125=3$

b. $log_{8}\ 1=0$

c. $log_{3}\ 81=4$

d. $log_{\frac{1}{2}}\ 16=-4$

e. $log_{\frac{1}{3}}\ 27=-3$

f. $log_{16}\ 4=\dfrac{1}{2}$

g. $ln\ \boldsymbol{e}=1$

h. $log_{125}\left(\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{1}{3}$

4. Escribir en forma logarítmica:

a. $64=8^{2}$

b. $9=27^{\frac{2}{3}}$

c. $8=4^{\frac{3}{2}}$

d. $1=\boldsymbol{e}^{0}$

e. $\dfrac{1}{8}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}$

f. $11=\sqrt{121}$

g. $7=\sqrt{49}$

h. $\dfrac{1}{16}=4^{-2}$

i. $0{,}1353=\boldsymbol{e}^{-2}$

j.

5. Resolver:

a. $log_{6}\ 36$

b. $log_{10}\ 0{,}001$

c. $log_{6}\ \dfrac{1}{36}$

d. $log_{2}\ \sqrt[5]{2^{3}}$

e. $log_{9}\ 3$

f. $log_{2}\ \sqrt{32}$

g. $log_{2}\ 8+log_{3}\ 9$

h. $log\,100+log_{2}\ 8-2\,log_{3}\ 27+log\,1$

i. $log_{2}\ 64+log_{8}\ 64-log_{4}\ 64$

j. $log_{5}\ 10+log_{5}\ 20-3\,log_{5}\ 2$

6. Simplificar:

a. $\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{2\sqrt[5]{16}}}{\sqrt{2}}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}} + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(9\sqrt[3]{3}\right)$

b. $\frac{\ln(216)}{\ln(36)}$

7. Exprese $\log_4 30 - \log_4 5 + \log_2 8 - \ln\left(\frac{1}{16}\right) - \log_4(3) - \frac{7}{2}$ en términos de $\ln(2)$

8. Alejandro va a elaborar papeletas para unas elecciones. Para ello tomará una hoja de papel y la cortará por la mitad. Cada vez que efectúa un corte coloca los trozos encima y vuelve a cortar por la mitad. El repetirá este proceso n veces.

a. Elabore una tabla que muestre el número de cortes que hace y la cantidad total de trozos que obtiene.
b. Busque un patrón en la cantidad de trozos que obtiene, con cada corte.
c. Determine cuántos trozos obtiene si hace 20 cortes.
d. Si el tiene 250 trozos cuántos cortes ha hecho?
e. Ahora si analizamos el área de cada trozo de papel, que se observa? Suponga que el área de la hoja inicial es de 64 cm cuadrados
- Como cambia el área?
- Cuál es la ecuación que representa el área de cada trozo después de n cortes

9. Organismos monocelulares se reproducen dividiéndose en dos células idénticas. Suponga que una amiba se divide cada media hora.

a. Un biólogo inicia un experimento con una amiba. Haga una tabla que muestre el número de amibas que tendrá al finalizar cada hora en un período de 8 horas.
b. Escriba una ecuación para el número de amibas *a* después de *t* horas.
c. Cuántas horas se necesitan para tener un millón de amibas?
d. Haga una gráfica (tiempo , amibas) para los datos obtenidos en a

10. Pedro Pataquiva tiene una colección de monedas que vale $.2500 pesos la cual se valorizan el 6% cada año. Este patrón de cambio es llamado *crecimiento compuesto*

a. Si el 6% se mantiene cada año, haga una tabla que muestre el valor de la colección durante 10 años.
b. Determine el factor de crecimiento , para cada año.

11. El moho crece rápidamente. El área cubierta por moho en una hogaza de pan a temperatura ambiente está dada por la siguiente tabla:

Día	Area con moho en cm^2
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81

a. Escriba una ecuación para el área de moho A después de *d* días.
b. Suponga ahora que el día cero una hogaza de pan tiene 25 milímetros cuadrados de moho y que el moho crece con la misma rapidez de la tabla. Determine el área cubierta durante los 4 primeros días.
c. Escriba la ecuación que se genera en la parte b.
d. Si se tiene ahora la siguiente ecuación $A = 50\left(3^d\right)$ para representar el área en milímetros cuadrados de moho después de d días
   - Cuál era el área cubierta por moho al empezar?
   - Cuál es el factor de crecimiento? (Razón entre el área cubierta en el día n y el día n-1)
   - Cuál es el área cubierta por moho al cabo de cinco días.
   - En que día el área de moho es de 10 cm cuadrados?

12. Cual es la relación entre ***a*** y ***b***, si al simplificar la expresión $\frac{10\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{a}}}{15^{\boldsymbol{b}-1}}$, obtenemos $\frac{2}{3}\boldsymbol{t}$

13. Encontrar el conjunto solución de:

a. $\log_t 2 + \log_t 4 = 1$

b. $3^{2x-1} = 17$

c. $2^{3x+1} = 32$

d. $3^{2x} - 5\times 3^{x} + 4 = 0$

e. $3^{4-x} = 27^{2-x}$

f. $4\sqrt{2^4} = 2^{3x}$

g. $\ln x = -3$

h. $\ln\left(x^2 - 9\right) - 2\ln(x-3) - \ln(x+3) = 0$

i. $\log_{3x} 18 = \log_4 8$

j. $\log(2x+8) = 1 + \log(x-4)$

k. $\left(\frac{5}{9}\right)^{2x-7} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{9}\right)^{1-3x}}$

l. $9^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = \sqrt{27^{x}}\,\sqrt[3]{81^{x+3}}$

m. $25^{x+2} - 5^{x+3} = 375$

n. $\log_2\left(4^{x} + 4\right) = x + \log_2\left(2^{x+1} - 3\right)$

o. $\log(x+4) = 1 - \log(x-5)$

p. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\sqrt[4]{3}\right) = x$

q. $\log_x\left(\sqrt[3]{7}\right) = \frac{2}{3}$

r. $b^{4x-9} = b^{16x-15}\cdot b^{9x-25}$ (b es una constante)

s. $5^{2x-3} = 2^{2-4x}$

t. $\log(x-a) - \log(x+a) = \log x - \log(x-a)$ (a es una constante)

u. $\log_6(x+1) = \log_6(1-x) + \log_6(2x+3)$

v. $\log^2 x - 3\log x = 2$

14. Ordenar de mayor a menor

a. $\ln\frac{1}{3}$ $\quad \log_3\frac{1}{3}$ $\quad \log\frac{1}{3}$ **b.** $\ln 3$ $\quad \log 3$ $\quad \log_2 3$

15. Expresar y como función de x

a. $\log_3 y = 4\log_3 2x$ **b.** $\log_3 6y = \log_3 9x + \log_3 6$

16. Si $\log 20 = 1{,}3011$ calcule

a. $\log 2$ **b.** $\log 200$ **c.** $\log 0{,}5$

17. Si $\log 2 = 0{,}30$ $\quad \log 3 = 0{,}50$ calcular:

a. $\log 2\sqrt{2}$ **b.** $\log 216$ **c.** $\log\sqrt{6}$

18. Encontrar el valor de x $\log_a x = \frac{2}{3}\log_a 27 + 2\log_a 2 - \log_a 3$ con $a > 0$

19. Relacione las siguientes columnas:

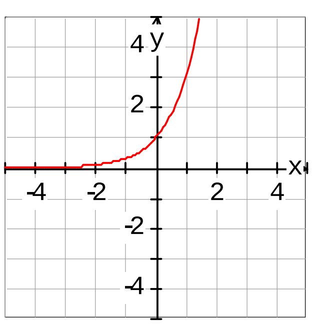
1	$\ln x < 0$	a	$x < 0$
2	$\ln x = 0$	b	$x = 0$
3	$\ln x > 0$	c	$x > 0$
4	$0 < e^x < 1$	d	$0 < x < 1$
5	$e^x = 1$	e	$x = 1$
6	$e^x > 1$	f	$x > 1$

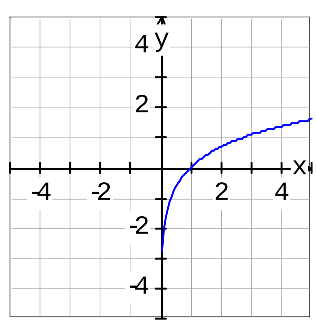
20. Resolver la siguiente ecuación $25^{\log_5 2x} = 16^2$

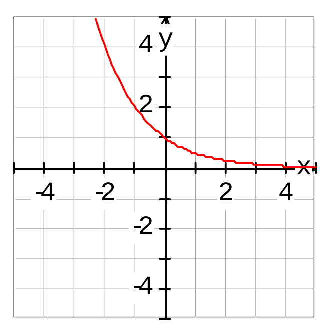
21. Demuestre que la función $y = e^x + x$ tiene un único cero en los reales

22. Diga si es falso o verdadero: si $\ln(x) = \ln(5) + \ln(8)$, entonces, $x = e^5 + e^8$

23. Identificar la función a la que corresponde cada gráfica







24. Diga si es Falso o Verdadero. Justifique su respuesta:

a. $3^x 3^y = 9^{x+y}$ **b.** $3^{x^2} = (3^x)^2$ **c.** $3^{-x} = (3^x)^{-1}$

d. $3^{|x|} = |3^x|$ **e.** $e^x + e^{-x} = e^0$ **f.**

25. Hacer la gráfica de las ecuaciones y completar la tabla:

Ecuación	$f(x) = -\frac{1}{2}2^x + 0.5$	$g(x) = 2\log(x-1)$
Dominio		
Rango		
Intervalos de Crecimiento o Decrecimiento		
Cortes con los ejes *x*		
Cortes con los ejes *y*,		
Ecuación de la asíntota		

26. Hacer la gráfica y determinar Dominio, Rango, Crecimiento o Decrecimiento, cortes con los ejes *x* y *y*, ecuación de la asíntota horizontal.

a. $f(x) = 2^x + 3$	**b.** $f(x) = -0.5^x - 1$	**c.** $f(x) = 3(2^x) + 1$
d. $f(x) = 2^{x-1} + 3$	**e.** $f(x) = 2^{x+2} + 3$	**f.** $f(x) = -\frac{1}{2}2^x + 0.5$
g. $f(x) = -2e^{-x} + 1$	**h.** $f(x) = \left(3^x\right)^2$	**i.** $f(x) = 3^{\lvert x \rvert}$

27. Hacer un análisis detallado de las gráficas de las funciones $y = 2^x$ y de $y = x^2$

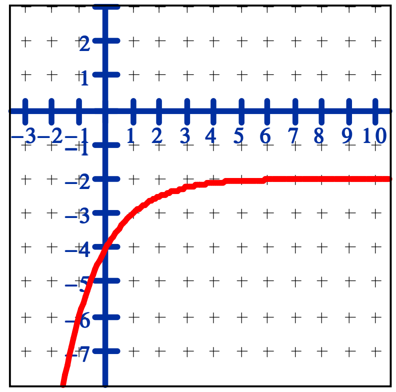
28. Si una función de la forma $y = a^x$ $\left(-1; e^3\right)$¿Cuál es la ecuación de la función? Si se sabe que pasa por el punto

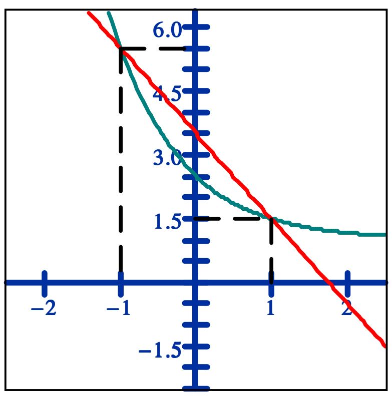
a. $\left(-1; e^3\right)$	**b.** $(3, e)$

29. Si se tiene la función exponencial $f(x) = 3^x$, grafique las siguientes funciones, especificando el efecto geométrico que se produce:

a. $2f(x)$	**b.** $-f(x)$	**c.** $f(x+1)$
d. $f(x) - 2$	**e.** $f(-x)$	**f.** $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

30. Para la gráfica dada que representa una parte de una función exponencial, encuentre la ecuación correspondiente.





31. Encuentre la ecuación de la recta y de la función exponencial ilustradas en el siguiente plano cartesiano

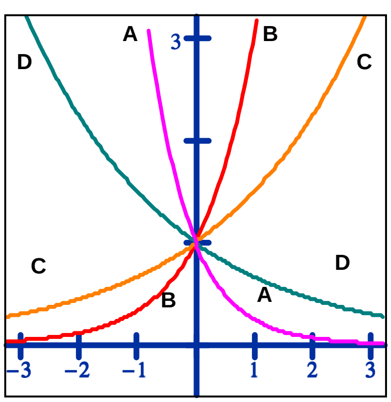
32. Usando el método gráfico, determine cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a. $3^{x} = 2 - x^{2}$

b. $9^{-x} = 3 - x$

c. $e^{x^{2}} = e^{-x} + 3$

33. Aparear con la función ilustrada en el plano cartesiano:



a. $f(x) = a^{x}$, si $a > 2$

b. $f(x) = a^{x}$, si $1 < a < 2$

c. $f(x) = a^{x}$, si $\frac{1}{2} < a < 2$

d. $f(x) = a^{x}$, si $0 < a < \frac{1}{2}$

34. La población P de una comunidad después de t años está dada por $P(t)=1.000\left(\frac{3}{2}\right)^{t}$ ¿La población crece o decrece con el paso del tiempo? ¿Por qué? ¿Cuál es la población inicial?

35. Se sabe que mientras un animal o planta esté vivo mantiene en sus tejidos una concentración constante de carbono 14(radiactivo). Al morir, los tejidos dejan de absorber carbono con lo cual comienza a disminuir su presencia por desintegración radiactiva según el modelo matemático:

$$C(t) = C_i\, e^{-(0.000124\, t)},$$

donde $C(t)$ es la cantidad restante de carbono después de t años, C_i es la cantidad inicial y t es el tiempo en años.

a. Graficar la función determinando dominio y rango

b. Determinar en cuántos años la cantidad inicial de carbono 14 baja a la mitad.

c. Calcular la antigüedad de un cráneo descubierto en un sitio arqueológico, si aún está presente el 10% de la cantidad original de carbono 14

36. Un almacén ha determinado que t semanas después de promover cierto artículo, el volumen de ventas está dado por una función de la forma $s(t)=B+Ae^{-kt}$ con $0\le t\le 4$, donde B=50.000 y es igual al volumen promedio semanal de ventas antes de la promoción. El volumen de ventas al final de la primera y la tercera semana fue de \$83.515 y \$65.055, respectivamente. Suponga que el volumen de ventas disminuye en forma exponencial y determine:

a. La constante de decaimiento k

b. El volumen de ventas al final de la cuarta semana

37. Encontrar el corte con el eje x de la función $f(x)=\log_8(x+4)$

38. Encontrar el corte con el eje y de la función $f(x)=\log_9(x+7)$

39. Hacer la gráfica y determinar Dominio, Rango, Crecimiento o Decrecimiento, cortes con los ejes x y y, ecuación de la asíntota horizontal

a. $f(x)=\log_2(x+1)$	**b.** $f(x)=-\log_3 x-1$	**c.** $f(x)=2\log(x-1)$
d. $f(x)=(\log_2 x)^2$	**e.** $f(x)=\log_2 -x$	**f.** $f(x)=\left\lvert\log_{\frac{1}{2}} x\right\rvert$
g. $f(x)=\log_3\lvert x\rvert$	**h.** $f(x)=\sqrt{\log_2 x}$	**i.** $f(x)=\dfrac{1}{4^{x}-2}$
j. $\begin{cases} y=\log_3 x \\ y=3^{x} \end{cases}$		

40. Gráficamente encuentre la solución de $\log_4(2x+3)>0$

41. Si $f(x) = \log x$, encontrar la solución de $2f(x) = 2f(100) - 3$

42. Si la gráfica de una función logarítmica contiene el punto $(1000;3)$. Cuál es la base?

43. En la escala de Richter la magnitud R de un terremoto se define como $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor y A_0 es la amplitud de referencia que corresponde a R = 0

La magnitud del famoso terremoto de san Francisco de 1906 se ha calculado en 8,5 en la escala de Richter. En 1979 un terremoto de magnitud 5,95 se dio en ésta ciudad. ¿Cuántas veces más intenso fué el terremoto de 1906?