Recordemos los efectos que tiene sobre las funciones estudiadas hasta ahora las siguientes situaciones para una función $f(x)$:

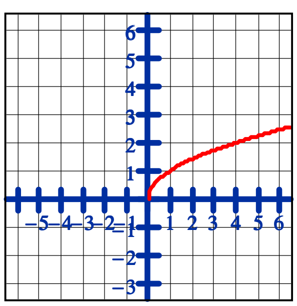
- $af(x)$ con $a \in \Re$: La constante produce un alargamiento vertical (dilatación) de la función, si $a > 1$ y si $0 < a < 1$ se comprime la función, manteniendo en ambos casos fijos los ceros, es decir los cortes con el eje x.
- $-f(x)$: El signo negativo produce una reflexión respecto al eje x de la función $f(x)$.
- $f(x+b)$ La constante b produce una traslación horizontal de la función $f(x)$ de b unidades a la derecha si $b < 0$ y de b unidades a la izquierda si $b > 0$.
- $f(x)+c$ La constante c produce una traslación vertical hacia arriba de la función $f(x)$ si $c > 0$ y una traslación hacia abajo de c unidades si $c < 0$
- $f(-x)$ El signo negativo en la variable produce una reflexión respecto al eje y de la función $f(x)$.
- $f(dx)$ comprime la gráfica de la función horizontalmente en un factor de d unidades, si $d > 1$ y si $0 < d < 1$ produce un alargamiento horizontal de la gráfica en un factor de d unidades.

- El símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la ***raíz cuadrada positiva*** de " , lo que significa $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ con $a \geq 0$

- $\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \Re$

Estudiaremos ahora la forma de hacer aproximación gráfica (esbozo) de relaciones de igualdad de la forma $f(x) = \sqrt{ax+b}$ y en general de la forma $\sqrt[n]{p(x)}$ con $p(x)$ un polinomio en los reales.

Iniciamos nuestro estudio con la más simple de ellas la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ es la que se muestra a continuación y donde se observa qué:



- Solo hay gráfica para valores de $x \geq 0$ ya que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida, lo que nos lleva a concluir que el dominio de la función son todos los reales positivos ó cero, lo que escrito en términos de intervalo corresponde a $[0;\infty)$.

- El punto de corte con el eje x es en $x = 0$

- El punto de corte con el eje y es en $y = 0$

- La función es creciente en todo su dominio ya que a mayor valor de x, mayor valor de $f(x)$
- El rango de la función son todos los reales mayores o iguales a cero es decir en términos de intervalo $[0;\infty)$
- La función es uno a uno ya que $\forall x_1 \neq x_2$ con x_1 y $x_2 \in$ Dominio de la función $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Conociendo su comportamiento y con la ayuda de una calculadora gráfica ó del programa WINPLOT realicemos las siguientes gráficas:

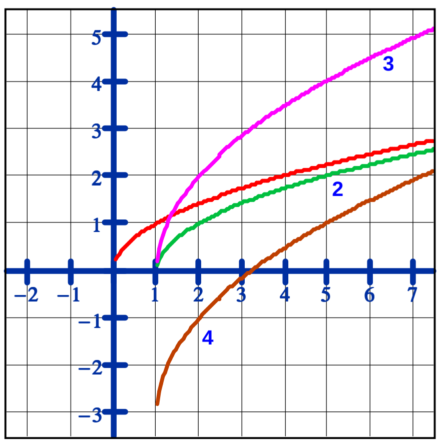
1. $f(x)=\sqrt{x+b}$ para diferentes valores de $b>0$ y de $b<0$, que puede concluir?
2. $f(x)=\sqrt{x}+c$ para diferentes valores de $c>0$ y de $c<0$, que puede concluir?
3. $f(x)=a\sqrt{x}$ para diferentes valores de $a>1$ y de $0<a<1$, que puede concluir?
4. $f(x)=-\sqrt{x}$ qué puede concluir?
5. $f(x)=\sqrt{kx}$ para diferentes valores de $k<0$ y de $k>0$ qué puede concluir?

Con lo anterior que puede generalizar para expresiones de la forma $f(x)=a\sqrt{x+b}+c$ con $a,b,c\in\Re$

Ejemplo 1

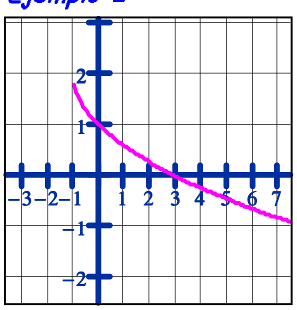
Hacer la gráfica de $f(x)=2\sqrt{x-1}-3$

Como se observa es de la forma $f(x)=a\sqrt{x+b}+c$, por lo tanto a partir de $f(x)=\sqrt{x}$ se tiene qué :



- El dominio de la función dada corresponde a todos los valores de x tales que $x-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$
- La función tiene un desplazamiento de 1 unidad a la derecha de $x=0$
- La función tiene un alargamiento vertical de 2 unidades.
- La función tiene una traslación vertical 3 unidades hacia abajo.
- El rango de la función es $[-3;\infty)$

Ejemplo 2



Hacer la gráfica de $y=2-\sqrt{x+1}$, a partir de la función $y=\sqrt{x}$

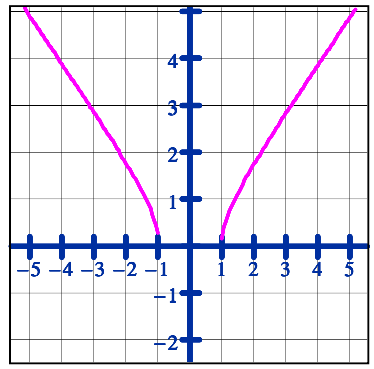
Si partimos de la función $y=\sqrt{x}$, primero debemos hacer una traslación horizontal de 1 unidad a la derecha, luego una reflexión respecto al eje de las x y por último una traslación hacia arriba de 2 unidades, obteniendo la siguiente gráfica

Ejemplo 3

Hacer la gráfica de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, ésta gráfica no es de la forma $f(x)=a\sqrt{x+b}+c$, a pesar de tener raíz cuadrada, por lo tanto debemos recurrir a otro método.

- Analicemos primero el dominio de la función para ello debemos determinar el conjunto solución de $x^2 - 1 \geq 0$. Algebraicamente se tiene qué:

$x^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \quad$ ó $\quad x < -1$, por lo tanto el dominio de la función es: $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



- Cortes con el eje ***x***. Para esto resolvemos algebraicamente $0 = \sqrt{x^2 - 1}$ lo que nos lleva a $x = \pm 1$
- Corte con el eje ***y***. Para esto evaluamos $f(0)$, lo que nos determina $f(0) = \sqrt{0^2 - 1} = \sqrt{-1}$ y como la raíz de un número negativo no está definida en los reales, concluimos qué no hay corte con el eje ***y***
- Ya qué todos los valores de $f(x)$ son positivos o cero, el rango será $[0; \infty)$
- Cuando $x \to \infty$ los valores de $f(x) \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$ los valores de $f(x) \to \infty$.
- Si analizamos que tipo de simetría (función par ó impar) se tiene:
$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$ por lo tanto la función es PAR , lo que significa qué es simétrica respecto al eje ***y***.

EJERCICIOS:

1. Para qué valores de ***x*** es $\sqrt{x} > x$?
2. Con el mismo método haga la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y haga un análisis de la función $y = a\sqrt[3]{x + b} + c$ con $a, b, c \in \Re$

3. Hacer la gráfica de las siguientes funciones.

a. $y = \sqrt{4 - x}$	**d.** $y = -2\sqrt{x - 3}$	**f.** $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$
b. $y = -\sqrt{x + 4}$	**e.** $y = -2\sqrt{x - 2} - 2$	
c. $y = \sqrt{16 - x^2}$		

4. Si $f(x) = \sqrt{x - 1} - 2$, Haga las gráficas de:

a. $3f(x)$	**d.** $f(\lvert x \rvert)$	**g.** $f(3x)$
b. $f(x - 2)$	**e.** $-f(x)$	
c. $f(x) - 1$	**f.** $\lvert f(x) \rvert$	

5. Use la representación gráfica para mostrar que si $x < 5$, entonces x no es solución de $\sqrt{x + 5} > 5 - \frac{x}{3}$

6. Determine la mínima distancia entre la parábola $y = \frac{1}{10}(x - 4)^2 + 28$ y la recta $y = 2x - 11$, en que punto de la parábola sucede esto?

7. Haga las gráficas de $f(x)=\left|\sqrt{\dfrac{3x-9}{2x+8}}\right|$ y de $g(x)=\dfrac{\left|\sqrt{3x-9}\right|}{\left|\sqrt{2x+8}\right|}$, establezca diferencias y justifíquelas.

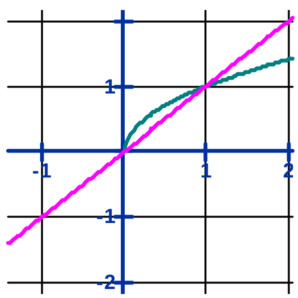
8. Compare el comportamiento de los siguientes pares de funciones

a. $y = 2\sqrt{x}$ con la de $y=\sqrt{2x}$

b. $y=\sqrt{-2x}$ con la de $y=-2\sqrt{x}$

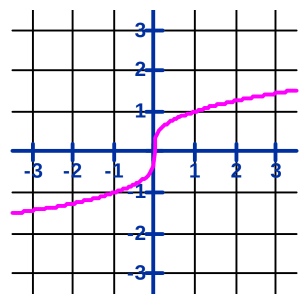
RESPUESTAS

1.

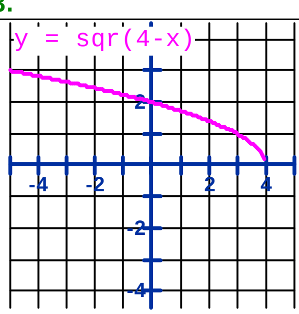


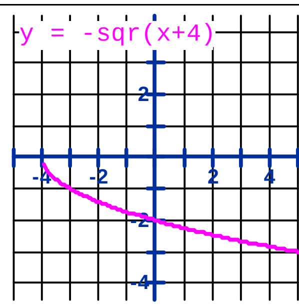
Para los reales en el intervalo $(0;1)$

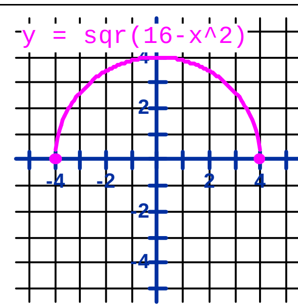
2.

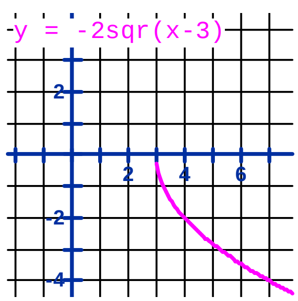


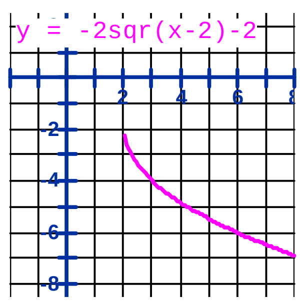
3.

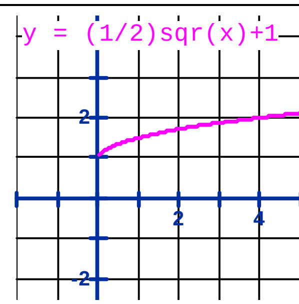




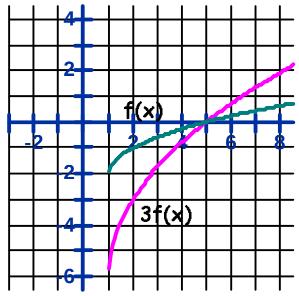


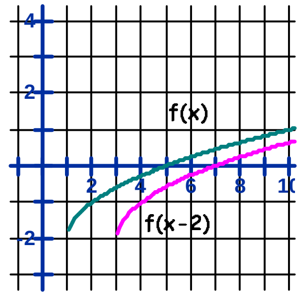


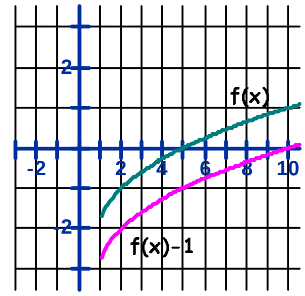


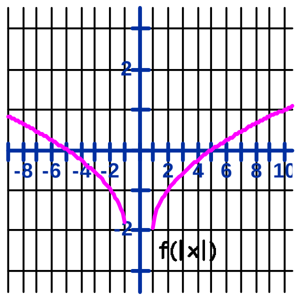


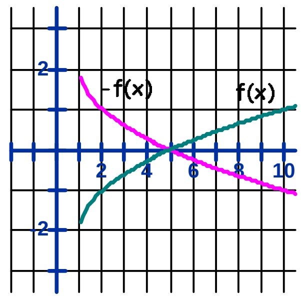
4.

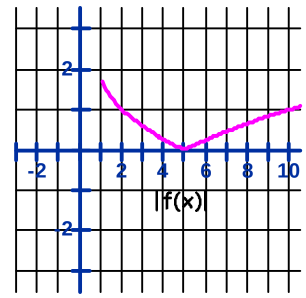


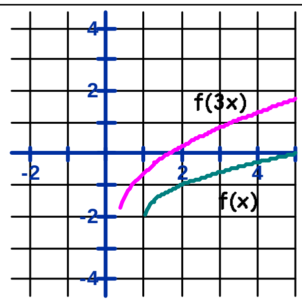




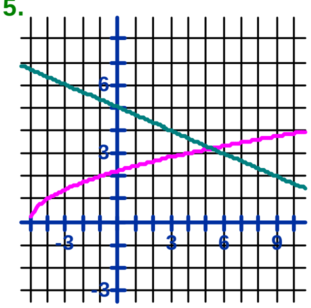






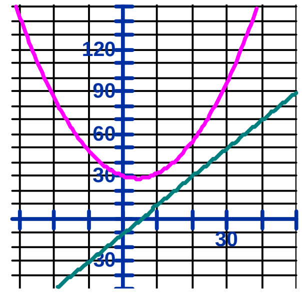


5.

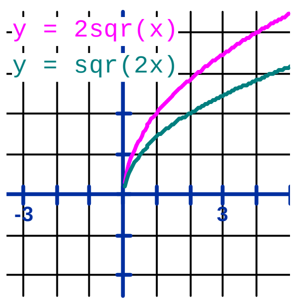


El punto donde se cortan es $(5{,}34\,;\,3{,}21)$ y para los $x < 5$ se cumple que $\sqrt{x+5} < 5 - \dfrac{x}{3}$

6.



7.



$$\sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x} \quad \text{y} \quad \sqrt{2} < 2$$