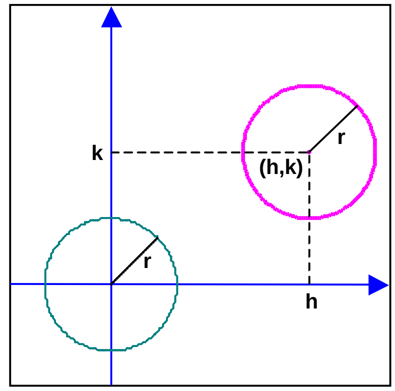
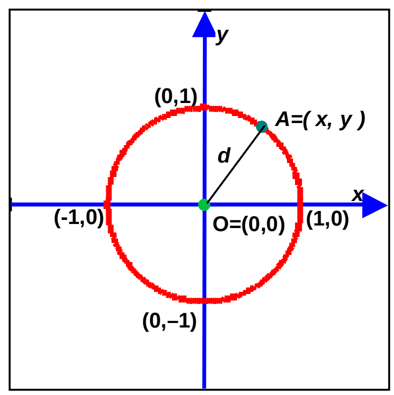
MATERIAL ADICIONAL CIRCULO Y CIRCUNFERENCIA
2004-1

Recordemos que:



- La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de un punto fijo llamado *centro.*
- El *radio* es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con cualquier punto sobre ella.
- La *cuerda* es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera sobre la circunferencia. Si la cuerda contiene el centro de la circunferencia, se llama *diámetro.*
- Un *arco* es una parte continua de una circunferencia.
- Si una recta es tangente a una circunferencia, entonces, el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la línea tangente.
- La razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro es una constante llamada $\pi \in \mathrm{I}$., donde **I** es el conjunto de los números **I**rracionales.
- La longitud de una circunferencia (perímetro) es igual a $2\pi r$ es decir

$$P = 2\pi r$$



Considerando una circunferencia con centro en $O = (0,0)$ y radio 1, un punto $A = (x, y)$ del plano se encuentra sobre la circunferencia si $d\ (O,A) = 1$, entonces por las propiedades del valor absoluto se tiene:

$d\,(O, A) = \sqrt{|x-0|^2 + |y-0|^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ Por propiedades del Valor Absoluto

Como $d\ (O,A) = 1$ se tiene

$1^2 = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = x^2 + y^2$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia de radio 1 y centro en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Esta circunferencia es llamada ***circunferencia unitaria***

Al analizar la gráfica de la circunferencia unitaria se puede observar:

- La gráfica **no** es la representación de una función, ya que no cumple con la definición de ésta, es decir: a cada valor de x no le corresponde un único valor de y.
- La circunferencia es simétrica con respecto al origen, con respecto al eje y ,con respecto al eje x, y respecto a $y = x$. Se puede decir además que cualquier diámetro es un eje de simetría.

Ahora, que ocurre si lo que se tiene es una circunferencia con centro en $O = (0,0)$, pero su radio no es 1?

Repitiendo el proceso anterior se concluye que la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si a partir de la circunferencia de radio r y con centro en el origen se efectúa una traslación de h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente se obtiene la gráfica representada en la figura.

Por lo tanto la ecuación de la nueva circunferencia es:

$$(\boldsymbol{x}-h)^2+(\boldsymbol{y}-k)^2=r^2$$

Esta ecuación es conocida como la ***ecuación canónica de la circunferencia.***.

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la circunferencia con centro $(-3;-2)$ y que pasa por el punto $(0;1)$

- Hallemos el radio de la circunferencia, para ello:

$$\boldsymbol{r}=\sqrt{(-3-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

Luego la ecuación canónica de la circunferencia es $(\boldsymbol{x}+3)^2+(\boldsymbol{y}+2)^2=18$

Al transformar algebraicamente la ecuación canónica se tiene:

$$(\boldsymbol{x}-h)^2+(\boldsymbol{y}-k)^2=r^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\boldsymbol{x}-h}{r}\right)^2+\left(\frac{\boldsymbol{y}-k}{r}\right)^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}h+h^2}{r^2}+\frac{\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{y}k+k^2}{r^2}-1=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\boldsymbol{x}^2-\frac{2h}{r^2}\boldsymbol{x}+\frac{h^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}\boldsymbol{y}^2-\frac{2k}{r^2}\boldsymbol{y}+\frac{k^2}{r^2}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{r^2}\boldsymbol{x}^2+\frac{1}{r^2}\boldsymbol{y}^2-\frac{2h}{r^2}\boldsymbol{x}-\frac{2k}{r^2}\boldsymbol{y}+\frac{h^2}{r^2}+\frac{k^2}{r^2}-1=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{r^2}\right)}_{A}\boldsymbol{x}^2+\underbrace{\left(\frac{1}{r^2}\right)}_{A}\boldsymbol{y}^2+\underbrace{\left(-\frac{2h}{r^2}\right)}_{C}\boldsymbol{x}+\underbrace{\left(-\frac{2k}{r^2}\right)}_{D}\boldsymbol{y}+\underbrace{\frac{h^2+k^2-r^2}{r^2}}_{E}=0$$

La ecuación anterior es de la forma $A\boldsymbol{x}^2+A\boldsymbol{y}^2+C\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{y}+E=0$ con $A\neq 0$, la cual es llamada ***ecuación general de la circunferencia.***

Al transformar una ecuación de la forma $A\boldsymbol{x}^2+A\boldsymbol{y}^2+C\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{y}+E=0$ con $A\neq 0$ mediante el proceso de completar cuadrados a su forma canónica puede dar lugar a una de las siguientes situaciones:

- Una circunferencia, cuando, $(\boldsymbol{x}-h)^2+(\boldsymbol{y}-k)^2$ es igual a una constante positiva
- Un punto, cuando $(\boldsymbol{x}-h)^2+(\boldsymbol{y}-k)^2$ es igual cero
- No se conforma circunferencia cuando $(\boldsymbol{x}-h)^2+(\boldsymbol{y}-k)^2$ es igual a una constante negativa.

Ejemplo 2

La ecuación $3\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-12=0$ determina una circunferencia? Si es así determine el centro y el radio de ella.

$$3\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-12=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\left(\boldsymbol{x}^2-\frac{2}{3}\boldsymbol{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)+3\left(\boldsymbol{y}^2+\frac{4}{3}\boldsymbol{y}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=12+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=12+\frac{1}{3}+\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{41}{3}$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{41}{9}$$

Dado que $\frac{41}{9}$ es un real mayor que cero, la ecuación representa una circunferencia con centro en $\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ con radio $\frac{\sqrt{41}}{3}$

Ejemplo 3

La ecuación $x^2+y^2-4x-6y+13=0$ determina una circunferencia? Si es así determine el centro y el radio de ella.

Usando el método de completar cuadrados se tiene:

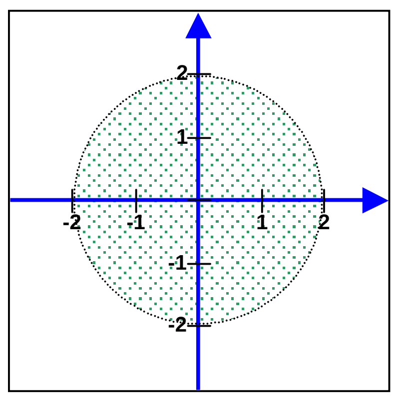
$$x^2+y^2-4x-6y+13=0 \Leftrightarrow (x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=-13+4+9 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=-13+13 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=0$$

Dado que $(x-2)^2+(y-3)^2$ es igual a cero se tiene que la ecuación $x^2+y^2-4x-6y+13=0$ corresponde al punto en el plano $(2;3)$

Si se analiza la relación de orden $Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+E<0$ con $A\neq 0$, se puede concluir que se generan todos los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia. El conjunto de estos puntos recibe el nombre de ***círculo.***

Ejemplo 4



Hallar el conjunto solución de $x^2+y^2<4$

El procedimiento a seguir es graficar la circunferencia $x^2+y^2=4$ y luego analizar para qué valores de x y de y se satisface la inecuación.

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es:

$$\{(x.y) \mid -2<x<2 \quad \text{y} \quad -2<y<2\}$$

Si desea reforzar estos conocimientos ir a la siguiente dirección:
http://descartes.cnice.mecd.es/4b_eso_/La_circunferencia/La_circunferencia.htm

EJERCICIOS

MATERIAL ADICIONAL CIRCULO Y CIRCUNFERENCIA
2004-1

1. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$. Encontrar el centro, el radio y dibujarla.

2. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $(3,-4)$ y radio 2

3. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen si el punto $(1,-4)$ está sobre ella.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(5,-2)$ y que pasa por el punto $(-1,5)$.

5. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro está sobre el segmento de recta que une los puntos $(5,-1)$ y $(-3,7)$

6. Demostrar que la ecuación $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$ representa un círculo. Encontrar su centro y su radio.

7. Encontrar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y centro en $(-1,5)$, y los dos puntos de la misma en los cuales la coordenada en x es 2.

8. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto donde la recta $x + 3y - 6 = 0$ corta al eje x.

9. Encontrar la circunferencia que tiene su centro en el punto donde se cortan las rectas $x + y = 2$, y $x - y = 4$ y tiene radio 2.

10. Encontrar la ecuación de la(s) recta(s) tangente(s) a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y tiene pendiente $\frac{3}{4}$.

11. Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(-4,2)$ y que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$

12. Determine si las siguientes ecuaciones corresponden a la de una circunferencia, si es así diga cuál es le centro y cuál el radio.

    a. $2x^2 + 2y^2 - 20x + 8y + 58 = 0$
    b. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$
    c. $10x^2 + 10y^2 - 100x - 60y + 180 = 0$

13. Cuál es la distancia entre los centros de las circunferencias cuyas ecuaciones son: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2x = 0$

14. Demuestre que las circunferencias: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$ y $(x-12)^2 + (y-3)^2 = 16$ son tangentes

15. Encontrar la ecuación de la circunferencia tal que:

    a. Tenga radio 5, se encuentra en el IV cuadrante y es tangente a ambos ejes
    b. Radio 2, tangente a las rectas $x = 2$ y $y = -1$ y se ubica arriba y a la derecha de estas rectas.

16. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $(-9;12)(-4;-13)(8;5)$

17. Encontrar los puntos donde la recta $y=x$ corta a la circunferencia del problema anterior.

18. Encontrar los puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2+2x=0$ y $x^2+y^2+2y=0$.

19. Encontrar la circunferencia que es tangente al eje x y tiene su centro en el punto $C:(2;1)$

20. Encontrar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(5;2)$ a la circunferencia $x^2+y^2=4$

21. Hallar la ecuación del círculo con centro en el vértice de la parábola $y=-x^2+3x+1$ y cuyo radio es igual a la distancia entre los arcos (cortes con el eje x de la parábola)

22. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-2;1)$ y es tangente a la recta $3x-2y-6=0$ en el punto $(4;3)$

23. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x+y+4=0$ y $7x-y+4=0$, con centro en la recta $4x+3y-2=0$.

24. Sea $x^2+y^2+Ax+6y-1=0$. Asignar dos (2) valores a *A*. Graficar las circunferencias. Hallar el área. Se intersectan las dos circunferencias?

25. Resuelva $\frac{1}{2}x^2+1\le x^2+(y-1)^2=4$ gráficamente y algebraicamente:

26. Si $x^2+(y-1)^2=4$ se intersecta con $f(x)=x-1$ y en uno de los puntos de corte se encuentra el vértice de la parábola $g(x)=x^2-4x+5$. Encuentre:

- **a.** El punto de intersección de $f(x)$ y $g(x)$
- **b.** Entre $g(x)$ y $x^2+(y-1)^2=4$
- **c.** Haga las gráficas correspondientes a $x^2+(y-1)^2=4$, $f(x)$ y $g(x)$

27. Encontrar en cada uno de los siguientes ejercicios la ecuación del círculo que satisface:

- **a.** Centro en $(2,-1)$ y radio $\frac{1}{2}$
- **b.** Centro en $(3,-5)$ y que es tangente al eje y
- **c.** Pasa por los puntos $A=(-2,3)$ $B=(4,3)$ $C=(-2,-1)$
- **d.** Tiene su centro sobre la recta $x-2y=6$ y pasa por los puntos $(1,4)$ y $(-2,3)$
- **e.** Centro en $(4,-2)$ y que el punto $(3,3)$ esté dentro de la circunferencia.

28. Cuál es la ecuación de la circunferencia que tiene de diámetro $(-3;1)$ a $(2;2)$

29. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene como tangentes $x+y=-4$ y $7x-y+4=0$. El centro del círculo se encuentra sobre $4x+3y-2=0$.

30. En cada uno de los siguientes ejercicios determine el centro y el radio del circulo:

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 4$

b. $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 31 = 0$

c. $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$

31. Encuentre la ecuación de la circunferencia que:

a. Tiene su centro en el eje y y pasa por el punto $Q = (2,3)$ y por el orígen.

b. Es tangente a la recta $2y = x - 2$ en el punto $P = (8,3)$ y pasa por el punto $Q = (12,7)$

c. Pasa por los puntos $A = (6,10)$ $B = (-2,-4)$ $C = (3,-5)$

d. Tiene como diámetro la cuerda común a las circunferencias dadas por : $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 1$ y $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 11$

e. Es tangente a la recta $3y = 5x - 1$ en el punto $R = (5,8)$ y tiene radio $r = 34^{\frac{1}{2}}$

f. Pasa por $E = (10,2)$ y $F = (3,3)$ y tiene un radio igual a 5

g. Tiene por diámetro la cuerda $x + y = 7$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 169$

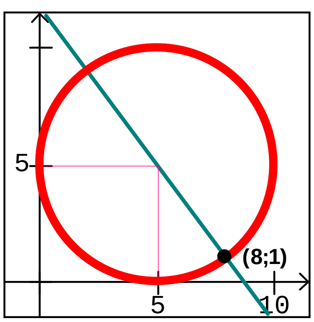
32. Cuales son las coordenadas de las intersecciones de las circunferencias :

$$x^2 + y^2 - 14x - 16y + 100 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

33. El punto $M = (1,4)$ es el punto medio de una cuerda de la circunferencia dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 34$ Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es aquella cuerda?

34. Obtener la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3y == 2x - 8$ en el punto $T = (7,2)$, sabiendo que pasa por el punto $P = (9,12)$

35. Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por $A = (-10,-2)$ y por los puntos de intersección de $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ y la recta $x - y + 4 = 0$



36. Encuentre la ecuación de la circunferencia y de la recta que se muestra en el plano cartesiano.

37. Considere los puntos $A(1;2)$ $B(-1;0)$ $C(4;-2)$

a. Halle la ecuación de la recta que es paralela al segmento AB y que pasa por C

b. Halle la ecuación de la circunferencia con centro en el punto medio de AB y que pasa por C.

RESPUESTAS.

1. Centro $(-2;4)$ radio 5

2. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$

3. $x^2 + y^2 = 17$

4. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 85$

MATERIAL ADICIONAL CIRCULO Y CIRCUNFERENCIA
2004-1

5. $(x-1)^2+(y-3)^2=32$

6. Centro $(1;-3)$ radio 2

7. $(x+1)^2+(y-5)^2=25$

a. $(2;9)$ $(2;1)$

8. $(x-6)^2+y^2=36$

9. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

10. $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$ ó $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$

11. $(x+4)^2+(y-2)^2=16$

12. No , No , Circunferencia de radio 4 y centro $(5;3)$

13. 5

14.

15. $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

16. $(x-4)^2+(y-1)^2=4$