

ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOSAS ALIGERADAS DE FUNDACION

Por: Luis Enrique García Reyes ⁽¹⁾
Y Alejandro Pérez Silva ⁽²⁾

1. INTRODUCCION

El diseño de losas de cimentación ha sido tradicionalmente uno de los aspectos del diseño estructural que requieren mayor trabajo y criterio del ingeniero estructural. Entre los aspectos que incrementan esta dificultad se pueden mencionar:

- ◊ El modelaje matemático del comportamiento de la losa misma.
- ◊ El modelaje matemático del comportamiento del suelo.
- ◊ Incógnitas sobre las cargas que la superestructura aplica sobre la losa.
- ◊ El desconocimiento de la reacción del suelo subyacente a la losa.
- ◊ El modelaje de las propiedades reológicas del suelo.
- ◊ La interacción estática y dinámica suelo-fundación-estructura.

Tradicionalmente el diseño, tanto desde el punto de vista geotécnico como el estructural, se ha realizado utilizando aproximaciones que van desde muy burdas hasta algunas muy sofisticadas.

Con el fin de despejar algunas de las incógnitas mencionadas y cuantificar los grados de imprecisión en que se incurre con algunas de las metodologías tradicionales se han llevado a cabo desde hace varios años una serie de investigaciones en la Universidad de los Andes (Ref.18, 26, 30, 31, 32 y 39) sobre el tema.

El presente trabajo resume las investigaciones mencionadas y especialmente la investigación desarrollada en la Ref. 30. Presenta una metodología para el análisis y diseño de losas de cimentación, tal como se utilizan en la ciudad de Bogotá en la zona de suelos blandos. Estas losas, llamadas tradicionalmente "losas flotantes" han sido utilizadas por algunas décadas en la ciudad y no ha existido consenso, dentro de la ingeniería local, acerca de la metodología más adecuada para describir el comportamiento de este sistema de cimentación y por ende poder fijar parámetros de diseño, especialmente desde el punto de vista estructural.

Por lo tanto el objetivo primordial fue el desarrollo de un procedimiento para el análisis y diseño de losas de fundación para edificios de baja y mediana altura para la zona de suelos blandos de la ciudad de Bogotá, tomando en cuenta la interacción suelo-fundación-estructura, tanto estática como dinámica, e incluyendo los efectos de deformación debido a consolidación de los estratos compresibles. Así mismo permite determinar los efectos de la deformabilidad del suelo en la respuesta de la estructura ante deformaciones elásticas, debidas a la consolidación y el efecto de la flexibilidad del suelo y la cimentación en la respuesta sísmica de la edificación.

(1) Socio de la Firma Proyectos y Diseños Ltda. Profesor de la Universidad de los Andes

(2) Socio de la Firma Proyectos y Diseños Ltda.

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL SUELO BAJO FUNDACIONES

2.1 INTRODUCCION

Desde sus inicios la Mecánica de Suelos ha tenido que depender de la teoría de elasticidad para la determinación de los estados de esfuerzo dentro de una masa de suelo, ya sea debido al peso propio del material de la masa de suelo o a la aplicación de cargas o deformaciones al suelo. La utilización de soluciones de la teoría de elasticidad al suelo tienen la enorme limitación de la suposición de que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones, o sea que el material es linealmente elástico, lo cual no se cumple en el suelo en general. Aunque esta misma inconsistencia se encuentra en otros campos de la ingeniería, como es el caso del diseño de estructuras de concreto reforzado por métodos de resistencia última utilizando metodologías de análisis linealmente elásticas; en el caso de mecánica de suelos la gran mayoría de las soluciones trascendentales aplicables provenientes de la teoría de elasticidad suponen que el suelo es linealmente elástico y además homogéneo e isotrópico. Un suelo nunca cumple estas tres condiciones simultáneamente.

La aparición en los años recientes de metodologías que permiten encontrar soluciones para materiales inelásticos, anisotrópicos y no homogéneos por medio de técnicas numéricas computacionales ha sido un avance importante. No obstante el uso indiscriminado de estas técnicas nos hace recordar la historia del ingeniero que hace el levantamiento topográfico de una parcela utilizando brújula y midiendo las distancias a pasos, ¡ para calcular posteriormente el área con una precisión de diez dígitos utilizando un computador !. Las soluciones muy sofisticadas al problema de determinación de esfuerzos en la masa de suelo producen resultados tan buenos como la información de que se disponga sobre las propiedades del suelo. En general esta información sobre las propiedades del rigidez de los diferentes estratos de suelo es tan escasa, e imprecisa, que los resultados probablemente contienen el mismo grado de imprecisión que las soluciones elásticas, homogéneas e isotrópicas de la teoría de la elasticidad.

A continuación se hace un resumen sobre las metodologías más utilizadas para determinar los estados de esfuerzo dentro del suelo y se discuten las características de deformabilidad de los suelos necesarias para poder plantear un modelo de interacción suelo estructura.

2.2 ESFUERZOS INDUCIDOS POR CARGAS APLICADAS EN LA SUPERFICIE

2.2.1 Soluciones Elásticas

- Teoría de Boussinesq

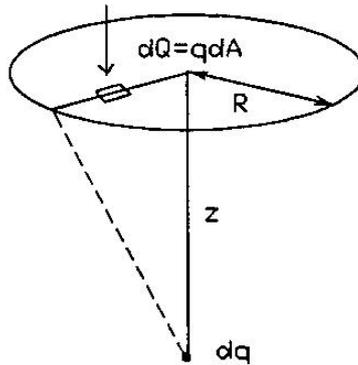
J. V. Boussinesq (1842-1929) dedicó gran parte de su vida al estudio del estado de esfuerzos dentro de sólidos elásticos. Dentro de los problemas por él resueltos (Ref.6) está la solución para el estado de esfuerzos en un punto inducido por una carga concentrada aplicada en la superficie de un sólido semi-infinito elásticamente isotrópico.

De acuerdo con la geometría presentada en la Figura 2-1 el esfuerzo vertical producido por la carga puntual es:

$$q_v = \frac{3Q}{2\pi z^2} \cos^5 \theta \quad (2-1)$$

Donde:

- Q = carga puntual (kg)
- q_v = esfuerzo vertical en un sólido (kg/cm²)
- r = distancia horizontal entre la carga y el punto donde se evalúan los esfuerzos (cm)
- z = profundidad (cm)
- θ = ángulo = Arcotangente de (r/z)



ESFUERZO EN UN PUNTO A UNA PROFUNDIDAD z
BAJO EL CENTRO DE UNA CARGA CIRCULAR DE INTENSIDAD q
Figura 2-1

y utilizando $\tan\theta = r/z$ se puede definir un nuevo término $\cos^5\theta = [z/(r^2+z^2)]^5$. Con lo cual la Ecuación (2-1) se convierte en:

$$q_v = \frac{3Qz^3}{2\pi(r^2+z^2)^5} = \frac{3Q}{2\pi z^2 [1+(r/z)^2]^{5/2}} \quad (2-2)$$

Realizando la integral de esta ecuación sobre un área, es posible determinar igualmente el estado de esfuerzos para un área cargada uniformemente.

- Teoría de Westergaard

Cuando la masa de suelo consiste en una estratigrafía compuesta por capas de materiales finos y gruesos, o un suelo anisotrópico, la ecuación de Boussinesq no da resultados confiables. Para este tipo de estratigrafías Westergaard (Ref.41) presenta la siguiente ecuación:

$$q_v = \frac{Q \sqrt{(1-2\mu)/(2-2\mu)}}{2\pi z^2 [(1-2\mu)/(2-2\mu) + (r/z)^2]^{3/2}} \quad (2-3)$$

la cual utiliza la misma nomenclatura que la ecuación de Boussinesq. Al tomar el coeficiente de Poisson, μ , como cero, se obtiene:

$$q_v = \frac{Q}{\pi z^2 [1+2(r/z)^2]^{3/2}} \quad (2-4)$$

Al igual que la ecuación de Boussinesq, esta última es integrable para aquellos casos en los cuales se tiene un área cargada.

- Método Unificado

Las dos metodologías anteriores (Boussinesq y Westergaard), las cuales son válidas para un medio espacio de sólido homogéneo e isotrópico, no son rigurosamente aplicables a depósitos de suelos naturales los cuales presentan características de anisotropía. En general en los suelos debido a esta

anisotropía (Ver Ref.45 y 46) los esfuerzos en el suelo no se disipan tan marcadamente como lo indican las relaciones obtenidas para materiales isotrópicos.

Fröhlich (Ref.16) investigó la distribución de esfuerzos radiales para casos anisotrópicos y propuso una fórmula para calcular el esfuerzo vertical inducido por una carga concentrada en la superficie de un sólido anisotrópico semi-infinito. Utilizando la misma nomenclatura de los casos anteriores:

$$q_v = \frac{\eta Q}{2\pi z^2 [1+(r/z)^2]^{(\eta+2)/2}} \quad (2-5)$$

Donde:

η = coeficiente de distribución de esfuerzos

En la Ref.45 se proponen los siguientes valores para η :

$\eta = 1.5$ - Aproximadamente la solución de Westergaard para un suelo fuertemente estratificado, reforzado por estratos horizontales múltiples e indeformables, con Módulo de Poisson $\mu=0$.

$\eta = 2.0$ - Suelo estratificado, con estratos de diferentes deformabilidades.

$\eta = 3.0$ - Solución de Boussinesq, suelo homogéneo e isotrópico.

$\eta = 4.0$ - Suelo homogéneo en que la compresibilidad se reduce con la profundidad, como en el caso de arenas.

- Gráficos de Newmark

Utilizando teoría de elasticidad, Newmark (Ref.28) desarrolló unos gráficos por medio de los cuales es posible determinar el estado de esfuerzos a cualquier profundidad producido por un área cargada. Por medio de un procedimiento gráfico muy simple es posible determinar la variación en esfuerzo.

- Elementos Finitos

Utilizando metodologías de elementos finitos es posible encontrar el estado de esfuerzos aun para casos complejos de perfiles estratificados y con propiedades diversas. Inclusive es posible en algunos programas utilizar propiedades no lineales del suelo.

2.2.2 Evaluación de Esfuerzos Bajo Losas de Fundación

Para el caso de losas de fundación es de gran importancia determinar los esfuerzos en el suelo bajo la losa pues la formulación de la interacción suelo-estructura se realiza en función de las deformaciones en la masa de suelo producidas por los esfuerzos que introduce la losa de fundación a la masa de suelo. Además la determinación de las deformaciones debidas a la consolidación del suelo depende directamente del incremento de esfuerzos sobre el estrato compresible.

El procedimiento consiste en determinar los incrementos de esfuerzo en lugares preseleccionados bajo la losa a diferentes profundidades. Inicialmente esta evaluación se puede realizar para un esfuerzo de contacto uniforme, lo cual solo es válido cuando la losa es muy rígida y garantiza esta uniformidad. Una vez se determinan en todos los lugares de la losa los esfuerzos de contacto locales, utilizando el mismo procedimiento, se pueden determinar los valores de los incrementos de esfuerzos para la distribución real de esfuerzos de contacto.

Se procede de la siguiente manera:

(a) Se determinan las coordenadas en planta (x_0, y_0) de los lugares de interés donde se quieren evaluar los incrementos de esfuerzo. En general es suficiente realizarlo en los lugares donde la losa recibe las cargas de la superestructura, o sea donde las columnas o muros de la estructura se apoyan sobre la losa.

(b) Dependiendo del tipo de suelo y su estratigrafía se fija el valor de η a utilizar en la Ecuación (2-5).

(c) Se define la profundidad máxima de influencia de los incrementos de esfuerzo. La profundidad máxima debe ser aquella a la cual no hay variación apreciable del incremento de esfuerzos. En la Ref.2 se recomienda utilizar una profundidad de $3B$ a $5B$, donde B es el ancho (o menor dimensión en planta) de la losa de cimentación, con un valor preferencial de $4B$.

(d) La losa se divide en n pequeños sectores rectangulares con dimensiones en planta a_i y b_i y con coordenadas de su centróide $(x_i, y_i, 0)$ localizado en el plano de contacto losa-suelo.

(e) Se define un esfuerzo de contacto promedio q y se calcula el incremento en esfuerzo causado por cada uno de los pequeños sectores en los puntos de interés por medio de la Ecuación (2-5), suponiendo que hay una carga concentrada con valor $Q = qa_i b_i$ en el centróide del pequeño sector.

El incremento de esfuerzo en cualquier lugar de interés localizado en las coordenadas (x_0, y_0, z) causado por el sector i , donde z es la profundidad donde se quiere evaluar el esfuerzo, se determina por medio de la siguiente ecuación:

$$q_i = \frac{\eta q a_i b_i}{2\pi z^2 \{1 + (r_i/z)^2\} (\eta+2)/2} \quad (2-6)$$

y

$$r_i = \sqrt{[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]} \quad (2-7)$$

Donde:

- a_i = alto del sector rectangular i (cm)
- b_i = ancho del sector rectangular i (cm)
- q = esfuerzo en el plano de contacto losa-suelo (kg/cm²)
- q_i = incremento en esfuerzo en las coordenadas (x_0, y_0, z) debido al sector i (kg/cm²)

f) Se calcula el incremento total de esfuerzo en el lugar de interés por medio de:

$$\Delta q_T = \sum_{i=1}^n q_i \quad (2-8)$$

Donde:

Δq_T = incremento total de esfuerzo en las coordenadas (x_0, y_0, z) (kg/cm²)

De esta manera es posible encontrar el estado de esfuerzos en el suelo bajo la losa debido a las cargas de la losa.

Cuando se conocen los esfuerzos de contacto de la losa sobre el suelo es posible determinar una mejor distribución del incremento de esfuerzos, simplemente introduciendo el valor real de q en la Ecuación (2-6). Debido a la flexibilidad de la losa y a las condiciones de frontera, es imposible tener una distribución uniforme de esfuerzos en el plano de contacto bajo la losa. Por esta razón es necesario corregir, por medio de un procedimiento iterativo los valores del esfuerzo de contacto y de esta manera obtener una mejor evaluación del incremento de esfuerzos en el suelo.

2.3 DEFORMACIONES INDUCIDAS POR CARGAS APLICADAS EN LA SUPERFICIE

2.3.1 Deformaciones Elásticas en la Superficie

Si se conoce el módulo de elasticidad del material, para el rango apropiado de esfuerzos, en todas las zonas de la masa de suelo, es posible determinar la deformación vertical de la superficie de contacto del suelo con la losa por medio de la siguiente ecuación:

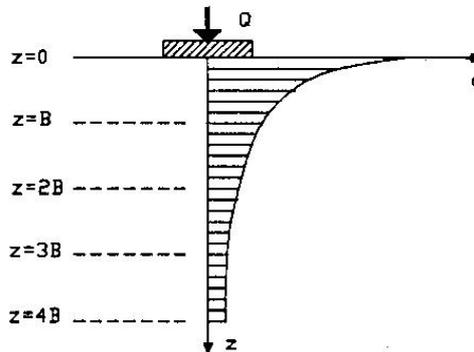
$$\delta_o = \int_0^{z_n} \epsilon(z) dz = \int_0^{z_n} \Delta q_T(z) / E_s(z) dz \quad (2-9)$$

Donde

- δ_o = Deformación vertical en la superficie causada por el incremento de esfuerzo (cm).
- $\epsilon(z)$ = Deformación unitaria a la profundidad z .
- $\Delta q_T(z)$ = Incremento de esfuerzo a la profundidad z debido a la carga en la superficie (kg/cm^2).
- $E_s(z)$ = Módulo de elasticidad del suelo a la profundidad z (kg/cm^2).
- z_n = Profundidad de influencia de la carga en superficie (cm).

Alternativamente cuando se dispone del módulo de subrasante k_s en toda la profundidad de influencia, es posible utilizar la siguiente ecuación para determinar la deformación δ_o en la superficie, dado un estado de esfuerzos en suelo como el mostrado en la Figura 2-2:

$$\delta_o = (1/z_n) \sum_{i=1}^{n-1} [\Delta q_T(z_i) (z_{i+1} - z_i) / k_s(z_i)] \quad (2-10)$$



VARIACION VERTICAL DEL ESTADO DE ESFUERZOS BAJO UNA CARGA
Figura 2-2

Donde:

- $k_s(z)$ = k_s de acuerdo con la profundidad z (kg/cm^3)
- $\Delta q_T(z)$ = Δq_T de acuerdo con la profundidad z .
- z_i = profundidad del punto i (cm)
- z_n = profundidad máxima de evaluación de esfuerzos (cm)
- δ_o = deflexión en la superficie (cm)

Cuando el valor de k_s es constante con la profundidad la Ecuación (2-10) se convierte en:

$$\delta_o = \Delta q_{TM} / k_s \quad (2-11)$$

Donde:

Δq_{TM} = esfuerzo promedio en el suelo (kg/cm²).

o sea:

$$\Delta q_{TM} = (1/z_n) \sum_{i=1}^{n-1} [q_T(z_i) (z_{i+1} - z_i)] \quad (2-12)$$

2.3.2 Determinación del Módulo de Subrasante

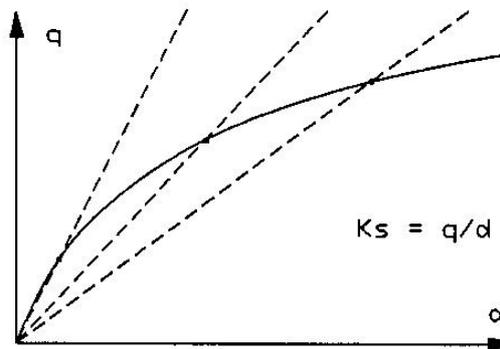
El módulo de subrasante, k_s , es la relación entre la presión sobre el suelo y la deflexión que se obtiene en el suelo. En la Figura (2-3) se muestran los resultados de un ensayo de placa sobre el suelo.

Por definición el valor de k_s se obtiene de la siguiente relación:

$$k_s = \frac{q}{\delta} \quad (2-13)$$

Donde:

q = esfuerzo sobre el suelo (kg/cm²)
 δ = deflexión (cm)

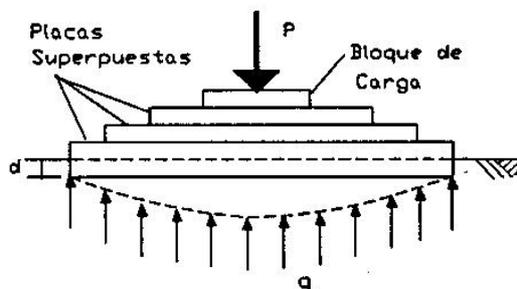


DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE SUBRASANTE A PARTIR DE LA CURVA ESFUERZO-DEFLEXION DE UN ENSAYO DE PLACA
 Figura 2-3

Es evidente que el valor de k_s depende de los valores de q y de δ , pues como puede verse en la Figura (2-3) la relación es no-lineal, por lo tanto el valor del módulo va a depender del rango de esfuerzos y de si se toma como el módulo secante o como el módulo tangente.

La realización de un ensayo de placa no es una labor fácil, excepto para placas muy pequeñas, debido a la carga de reacción que se necesita para el ensayo. Aún para placas muy pequeñas de 45 a 75 cm de diámetro el valor de δ es difícil de medir pues la placa se deforma por no ser totalmente

rígida y distorsiona los valores de k_s que se obtienen. Al encarrar varias placas (ver Figura 2-4) se obtiene una rigidez mejor de la placa (Ref.7), pero de todas maneras el valor graficado corresponde a la carga del ensayo dividida por el área de la placa (esfuerzo promedio) y la deflexión promedio medida.



ENSAYO CON PLACAS SUPERPUSTAS
Figura 2-4

Terzaghi en la Ref.34 propuso que el valor de k_s para zapatas de tamaños normales puede obtenerse de los valores de ensayos de placa utilizando las siguientes relaciones:

- Para zapatas sobre arcilla:

$$k_s = k_1 B \quad (2-13)$$

- Para zapatas sobre arena, incluyendo los efectos de tamaño:

$$k_s = k_1 [(B+1)/2B]^2 \quad (2-14)$$

Donde:

k_1 = valor de k_s obtenido del ensayo de una placa de un pte cuadrado (1'x1') en (kg/cm³)
 B = ancho de la zapata (cm)

El valor de k_s está relacionado con el módulo de elasticidad E_s del suelo. Vesic en la Ref.40 propone que el módulo de subrasante se evalúe por medio de la siguiente expresión:

$$k_s = 0.65/B [(E_s B^4)/E_f I_f]^{1/12} [E_s/(1-\mu)^2] \quad (2-15)$$

Donde:

E_s = módulo de elasticidad del suelo (kg/cm²)
 E_f = módulo de elasticidad de la fundación (kg/cm²)
 B = ancho de la fundación (cm).
 I_f = Momento de inercia de la fundación con respecto a un eje horizontal (cm⁴)
 μ = módulo de Poisson

La ventaja del método de Vesic está en que el valor de k_s se puede determinar en el laboratorio.

A continuación se presentan tres Tablas de valores de k_s provenientes de tres fuentes diferentes, las cuales dan valores aproximados del módulo de subrasante.

La Tabla 2-1 (Ref.43) puede utilizarse como guía para determinar un rango de valores para k_s , cuando se conoce la clasificación del suelo.

Tabla 2-1
MODULO DE SUBRASANTE DE ACUERDO CON LA COMPOSICION DEL SUELO

Tipo de Suelo	k_s (kg/cm ³)			
	densidad natural		densidad compactada	
GW	14.0	15.0		
GM	12.0	15.0		
GP	11.0	14.0		
GU	9.5	13.0		
GC	8.0	12.0		
SW	8.0	12.0		
SM	8.0	12.0		
SP	7.0	9.5		
SU	5.5	8.0		
SC	5.5	8.0		
CL	3.3	7.0	2.0	3.3
ML	3.3	7.0	2.0	3.3
OL	3.0	5.0	0.7	2.8
MH	3.0	5.0	1.4	2.8
CH	2.0	3.3	0.7	1.8
OH	2.0	3.3	0.7	1.8

Convenciones:

G = Grava S = Arena M = Limo C = Arcilla O = Orgánico
W = Bien Gradado P = Mal Gradado U = Gradación Uniforme
L = Compresibilidad media a baja H = Alta Compresibilidad

Bowles (Ref.7) da la siguiente tabla de rangos de valores para k_s .

TABLA 2-2
RANGO DE VALORES DEL MODULO DE SUBRASANTE (k_s)

Suelo	k_s (kg/cm ³)
Arena Suelta	0.5 - 1.6
Arena Medianamente Densa	1.0 - 8.0
Arena Densa	6.4 - 12.8
Arena Arcillosa Medianamente Densa	3.2 - 8.0
Arena Limosa Medianamente Densa	2.4 - 4.8
Suelos Arcillosos:	
$q_u \leq 2 \text{ kg/cm}^2$	1.2 - 2.4
$2 < q_u \leq 4 \text{ kg/cm}^2$	2.4 - 4.8
$q_u > 8 \text{ kg/cm}^2$	> 4.8

Para los suelos arcillosos de Bogotá se tienen los siguientes valores típicos (Ref.12)

TABLA 2-3 VALORES TÍPICOS DE k_s PARA LOS SUELOS ARCILLOSOS DE BOGOTÁ		
s_u (kg/cm ²)	E_s (kg/cm ²)	k_s (kg/cm ³)
1.50	225.0	2.75
1.00	150.0	2.50
0.75	112.5	1.88
0.50	75.0	1.25
0.25	37.5	0.63
0.15	22.5	0.38

s_u = Resistencia al corte medida por medio de veleta.
 E_s = Módulo de Elasticidad del Suelo
 k_s = Módulo de Subrasante

Debido a la incertidumbre que existe con respecto al valor de k_s que se debe utilizar, es conveniente insistir en que es una práctica aconsejable el utilizar un rango de valores, en lo posible un valor alto, uno bajo y uno intermedio, en el diseño de elementos sobre suelos para los cuales no se ha determinado el valor de k_s en el laboratorio o en el terreno.

2.3.3 Deformaciones por Consolidación del Suelo

La deformación o asentamiento que se obtiene en la superficie causada por la consolidación de un suelo cohesivo debido a un aumento en el esfuerzo efectivo en el estrato compresible, se obtiene (Ref.29) por medio de la siguiente ecuación:

$$s = \frac{C_c}{1 + e_o} H \log_{10} \frac{p_o + \Delta p}{p_o} \quad (2-16)$$

Donde:

- C_c = coeficiente de consolidación
- e_o = relación de vacíos antes de aplicar la carga
- H = Espesor del estrato compresible (cm).
- p_o = esfuerzo efectivo en el suelo (kg/cm²)
- Δp = cambio en el esfuerzo efectivo (kg/cm²)
- s = asentamiento debido a la consolidación (cm)

En el caso de un suelo cohesivo localizado debajo de una losa de fundación, de acuerdo con los resultados de esfuerzos en el suelo obtenidos en la Sección 2.2.2 es posible determinar el valor del incremento de esfuerzo Δp en el suelo. Conociendo los otros valores, suministrados por el estudio de suelos, es posible determinar el valor de s o sea el asentamiento en cada uno de los puntos bajo la losa.

Vale la pena anotar que para la utilización de esta metodología es necesaria una gran intercomunicación entre el ingeniero estructural y el ingeniero geotecnista pues hay que tener en cuenta una serie de aspectos provenientes de la parte geotécnica como son:

(a) definición de si el suelo está en la zona de consolidación normal, con el fin de utilizar el coeficiente de consolidación c_c adecuado.

(b) definición de la estratigrafía con el fin de aplicar los valores de los parámetros del suelo adecuados a cada estrato.

(c) confirmación de que el suelo cohesivo esté drenado en la parte superior e inferior con el fin de garantizar que se están utilizando los valores adecuados de α .

(d) definición del tiempo en el cual debe ocurrir el asentamiento con el fin de poder hacer una combinación realista de los efectos a corto y largo plazo, lo cual influye en la selección de los coeficientes de mayoración de las cargas para efectos del diseño de los elementos de la losa de cimentación.

(e) evaluación cuidadosa de las cargas permanentes que generarán el aumento del esfuerzo efectivo y por ende la consolidación del estrato.

(f) interpretación de otros fenómenos colaterales que pueden contribuir al asentamiento como son la desecación debida al proceso de urbanización, cambios en el estado de esfuerzos en el suelo debido a la realización de construcciones adyacentes, etc.

3. INTERACCION SUELO ESTRUCTURA EN LOSAS DE FUNDACION

3.1 INTRODUCCION

El término "interacción suelo-estructura" ha variado en su connotación a través del tiempo: en los albores de la mecánica estructural su aplicación estuvo centrada al problema del diseño de rieles de ferrocarril, posteriormente se aplicó a la solución de problemas relacionados con la descripción del comportamiento de cimentaciones donde se empezaron a aplicar principios de deformabilidad del suelo, llegando hasta las metodologías del diseño de bases para máquinas. Posteriormente se aplicó al tipo de problemas que se cubre dentro del presente trabajo, o sea el diseño de cimentaciones donde el orden de magnitud de la rigidez de los elementos de la cimentación es similar a la del suelo. Posteriormente con el mejor entendimiento del fenómeno sísmico fue adquiriendo poco a poco la connotación de un aspecto muy importante del comportamiento sísmico de las estructuras que es la interacción dinámica entre la estructura y el suelo localizado en las cercanías de la base de la edificación. Por último el término "interacción suelo-estructura" se ha utilizado erróneamente para describir los fenómenos de amplificación de la onda sísmica al viajar desde la roca hasta la superficie a través de estratos de suelos blandos o poco densos. Esta acepción es errada pues la estructura no participa directamente en el fenómeno y por lo tanto no se puede hablar de una "interacción".

Para efectos de la presente trabajo la "interacción suelo-estructura" se refiere a la evaluación y cuantificación de los fenómenos que se presentan en el plano de contacto suelo-estructura, o sea en el plano de contacto entre la estructura y el suelo que le sirve de apoyo.

No sobra hacer un breve recuento del desarrollo histórico del tema del tratamiento del suelo de cimentación como un medio elástico, lineal o no-lineal:

La suposición de que los esfuerzos de contacto entre la cimentación y el suelo son proporcionales en cualquier punto a la deflexión de la cimentación en ese punto fue postulada por E.Winkler (Ref.42) en 1867 y constituyó la base del trabajo clásico de H.Zimmermann (Ref.47) sobre el análisis de carrileras de ferrocarril publicado en 1888.

Sobre este enfoque se siguió avanzando durante los finales del siglo XIX y comienzos del XX y en 1943 M.Hetenyi (Ref.19) publicó el libro clásico sobre el tratamiento completo del tema, trabajo que sigue siendo vigente en la actualidad.

En la introducción de su trabajo Hetenyi indica:

"... Las propiedades físicas de los suelos son obviamente de una naturaleza mucho más compleja de la que puede ser representada por una relación matemática tan simple como la supuesta por Winkler. ..."

A partir de este momento puede decirse que los esfuerzos académicos al respecto se enfocaron en dos aspectos totalmente diferentes: uno hacia la determinación de un mejor modelaje de la parte estructural de la interacción y otro hacia lo que ocurre dentro de la masa de suelo propiamente dicha, gestada principalmente por los avances en la mecánica de suelos ocurrida a partir de los años cuarenta.

Como ejemplos del primer aspecto puede decirse que los trabajos presentados en la referencias 8, 9, 14, 22 y 44 son representativos y trabajos más recientes como los presentados en las referencias 4 y 33 siguen dentro de esa línea.

Dentro del segundo aspecto puede decirse que la tendencia ha gravitado por una lado con los trabajos de J.E.Bowles (Ref.7) y por otro lado con los trabajos de L.Zeevaert (Ref.45 y 46)

Recientemente fue publicado por el Instituto Americano del Concreto (ACI) una guía para el diseño de zapatas y losas de cimentación (Ref.2) en la cual se presentan recomendaciones para el manejo del problema del análisis y diseño de este tipo de cimentaciones.

3.2 MODELO DE WINKLER

La aplicación directa de la teoría de Winkler (Ref.42) en el análisis de vigas sobre medios elásticos está dada directamente sobre la ecuación de la línea elástica de la viga, la cual para una viga normal es:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -p(x) \quad (3-1)$$

Donde:

- E = módulo de elasticidad (kg/cm²)
- I = inercia (cm⁴)
- p(x) = cargas transversales (kg/cm)
- x = ordenada longitudinal de la viga (cm)
- y = deformación transversal (cm)

En el caso de la viga apoyada en toda su longitud sobre un medio elástico las cargas transversales p(x) se convierten en una fuerza transversal equivalente, proporcional a la deflexión, y. Esto implica que el medio de apoyo cumple la ley de Hooke. Su elasticidad puede por lo tanto caracterizarse por medio de una fuerza tal que distribuida sobre un área unitaria produce una deflexión igual a la unidad. Esta constante de elasticidad del medio de apoyo, k_s, es el "módulo de subrasante" y tiene unidades de (kg/cm³).

Al suponer que la viga bajo consideración tiene una sección transversal uniforme y que su ancho, b, es constante, el cual constituye el plano de contacto con el medio elástico de apoyo, una deflexión unitaria produciría una reacción igual a bk_s y por lo tanto en un punto donde la deflexión sea y, la intensidad de la reacción distribuida sobre una longitud unitaria de viga sería:

$$p(x) = b k_s y \quad (3-2)$$

Donde:

- b = ancho de la viga (cm)
- k_s = módulo de subrasante (kg/cm³)

y por lo tanto la Ecuación (3-1) se convierte en:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -b k_g y \quad (3-3)$$

y ésta es la ecuación diferencial de la elástica de una viga apoyada elásticamente en toda su longitud.

Para obtener la solución de la ecuación diferencial debemos substituir $y = e^{mx}$ en (3-3) para obtener la ecuación característica:

$$m^4 = - \frac{bk_g}{EI} \quad (3-4)$$

cuyas raíces son:

$$m_1 = - m_3 = \sqrt[4]{(bk_g/4EI)} (1+i) = B (1+i) \quad (3-5)$$

$$m_2 = - m_4 = \sqrt[4]{(bk_g/4EI)} (-1+i) = B (-1+i) \quad (3-6)$$

y la solución general toma la forma:

$$y = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + A_3 e^{m_3 x} + A_4 e^{m_4 x} \quad (3-7)$$

donde

$$B = \sqrt[4]{(bk_g/4EI)} \quad (3-8)$$

Haciendo la transformación de las constantes imaginarias por medio de las ecuaciones de Euler es posible convertir estos términos en sumas de senos y cosenos y a su vez reemplazar el término exponencial por senos y cosenos hiperbólicos. Esto conduce (Ref.3) a la siguiente solución general de la línea elástica:

$$Y_x = Y_0 F_1(Bx) + \frac{1}{B} \theta_0 F_2(Bx) - \frac{1}{B^2 EI} M_0 F_3(Bx) - \frac{1}{B^3 EI} V_0 F_4(Bx) \quad (3-9)$$

Donde:

$$\begin{aligned} F_1(Bx) &= \text{Cosh}(Bx) \text{Cos}(Bx) \\ F_2(Bx) &= 1/2 [\text{Cosh}(Bx) \text{Sen}(Bx) + \text{Senh}(Bx) \text{Cos}(Bx)] \\ F_3(Bx) &= 1/2 [\text{Senh}(Bx) \text{Sen}(Bx)] \\ F_4(Bx) &= 1/4 [\text{Cosh}(Bx) \text{Sen}(Bx) - \text{Senh}(Bx) \text{Cos}(Bx)] \end{aligned}$$

y

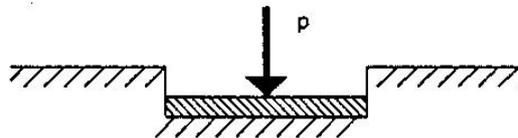
$$\begin{aligned} Y_0 &= \text{deflexión en } x=0 \\ \theta_0 &= \text{giro en } x=0 \\ M_0 &= \text{momento en } x=0 \\ V_0 &= \text{cortante en } x=0 \end{aligned}$$

Con base en la Ecuación (3-9) y el principio de superposición, es posible obtener la solución de una viga de cualquier longitud y sometida a cualquier sistema de cargas y de condiciones de frontera. En la Ref.19 es posible encontrar soluciones para un sinnúmero de casos prácticos.

En la respuesta de vigas de longitud finita la acción de las fuerzas colocadas en un extremo va a afectar la deflexiones del otro extremo de acuerdo con la magnitud de βl , donde β es la constante definida en la Ecuación (3-8) y l es la longitud de la viga. De acuerdo con el valor de βl es posible dividir la discusión del comportamiento de vigas sobre cimentaciones elásticas (Ref.35) en tres grupos:

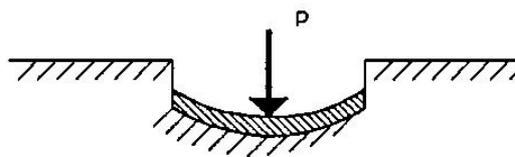
- (a) Vigas cortas, $\beta l < 0.60$
- (b) Vigas de longitud intermedia, $0.6 < \beta l < 5.0$
- (c) Vigas largas, $\beta l > 5.0$

Para las vigas del grupo (a) se puede despreciar totalmente la flexión y considerar las vigas como infinitamente rígidas, debido a que la deformación por flexión es despreciable en comparación con las de la cimentación. Ver Figura 3-1.



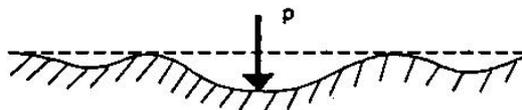
DEFLEXIONES DEL CONJUNTO
SUELO-ESTRUCTURA PARA $\beta l < 0.60$
Figura 3-1

Las vigas del grupo (b) se caracterizan por el hecho de que una fuerza actuando en un extremo de la viga tiene influencia apreciable en el otro extremo de la viga, por lo tanto deben tratarse como vigas de longitud intermedia. Ver Figura 3-2.



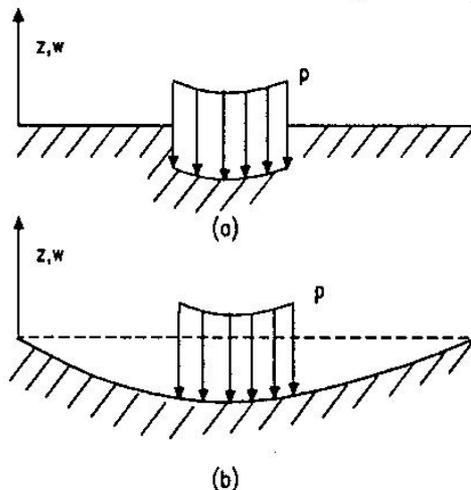
DEFLEXIONES DEL CONJUNTO
SUELO-ESTRUCTURA PARA $0.6 < \beta l < 5.0$
Figura 3-2

Para las vigas del grupo (c) se puede utilizar la suposición de que estando localizados en un extremo de la viga, el otro extremo se encuentra en el infinito. Por lo tanto la viga se puede considerar como infinitamente larga. Ver Figura 3-3.



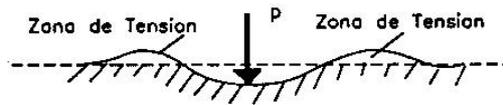
DEFLEXIONES DEL CONJUNTO
SUELO-ESTRUCTURA $\beta l > 5.0$
Figura 3-3

En general puede decirse que esta metodología, con las limitaciones inherentes al hecho de que la rigidez del suelo se considera lineal y que es constante en toda la longitud de la viga, ha sido la base de los análisis teóricos de cimentaciones sobre zapatas corridas tomando en cuenta la rigidez del suelo. El inconveniente más grave que presenta esta metodología al ser aplicada a casos reales, ocurre en las condiciones de frontera y está ilustrado en la Figura (3-4). Consiste en el hecho de que se está considerando que el suelo desaparece en el extremo de la viga y por lo tanto no existe ninguna influencia del suelo adyacente a los extremos de la viga.



INCONSISTENCIA DE LA DEFORMACION DEL SUELO
PRESENTADA POR EL MODELO DE WINKLER EN LAS FRONTERAS
Figura 3-4

El otro inconveniente que se le anota a esta metodología consiste en el hecho de que su uso desprevenido puede conducir a errores graves cuando la viga se levanta sobre el suelo, pues la hipótesis de rigidez del suelo tal como la plantea Winkler es válida tanto para compresión como para tensión sobre el medio elástico de soporte. Observando la Figura (3-5) puede notarse que cuando la viga se levanta sobre el suelo el modelo matemático supone que el suelo entra en tensión, lo cual es falso para todos los casos de cimentaciones reales. Este aspecto debe tratarse con gran cuidado cuando se utiliza esta metodología.



**ERROR AL TOMAR EN CUENTA ESFUERZOS
DE TENSION EN EL SUELO**
Figura 3-5

El modelo de Winkler, dada su simplicidad, es aplicable a vigas, losas, e inclusive se puede implantar en elementos finitos de diferentes características. En la Ref.10 se discute ampliamente el tema de aplicar modelos de Winkler a elementos finitos. No obstante las limitaciones del modelo respecto a las condiciones de frontera siguen vigentes. Por esta razón la utilización de programas de elementos finitos para la interacción suelo-estructura no es garantía de que se estén utilizando condiciones de frontera adecuadas y por lo tanto es responsabilidad del usuario determinar si el programa simplemente utiliza un modelo de Winkler o presenta un desarrollo teórico que subsane las deficiencias anotadas anteriormente.

3.3 MODELO DE ZEEVAERT

El profesor Zeevaert de la Universidad Nacional Autónoma de México ha estudiado el problema de las fundaciones en suelos compresibles desde hace muchos años. El hecho de que su práctica profesional y académica la haya realizado en la ciudad de México, con suelos probablemente más difíciles que los de la ciudad de Bogotá, cobra enorme importancia para los ingenieros que practican aquí. Dentro de sus numerosas publicaciones existen dos (Ref.45 y 46) que tratan de manera amplia y profunda las losas de fundación y la interacción suelo-fundación-estructura.

En la formulación y solución del problema Zeevaert da unos lineamientos que se pueden resumir de la manera que se presenta a continuación. Es importante anotar que Zeevaert plantea sus procedimientos utilizando metodologías matriciales (álgebra lineal).

Como un primer paso establece la deformación de la superficie de contacto suelo-fundación utilizando un procedimiento similar al planteado en la Sección 2.3.1 del presente trabajo, por medio de una matriz que llama Ecuación Matricial de Asentamientos [EMA].

Luego establece condiciones de compatibilidad en varios puntos de la cimentación y por medio de ellas formula un sistema de ecuaciones simultáneas, cuyas incógnitas son las deformaciones del plano de contacto suelo-fundación. En estos puntos se introduce la rigidez del suelo, lineal y con un valor igual al área aferente por el módulo de subrasante. Este sistema de ecuaciones simultáneas lo llama Ecuación Matricial de Interacción [EMI].

A continuación define un procedimiento iterativo, por medio del cual determina los valores de las deformaciones al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas planteado en [EMA]. De los valores de las deformaciones encuentra los esfuerzos de contacto y al aplicarlos a la ecuación de asentamientos [EMI] encuentra unos nuevos valores de las deformaciones. Este procedimiento se sigue hasta que los valores de las deformaciones en los puntos donde se aplicaron las ecuaciones de compatibilidad no cambian de una manera apreciable.

Es importante anotar que Zeevaert introduce dentro del sistema de ecuaciones planteadas el efecto de deformaciones causadas por flexión de la fundación, por desplazamientos elásticos y reológicos del suelo.

Además Zeevaert define la manera como pueden determinarse en el laboratorio las propiedades del suelo, tanto elásticas como reológicas.

3.4 MODELO DE BOWLES

El modelo de Bowles está presentado en la Ref.7 y es posible ver su evolución a través de las cuatro ediciones que se han publicado. En esencia es un modelo de Winkler, al cual Bowles le ha introducido una serie de modificaciones para corregir algunos de los problemas anotados anteriormente del modelo de Winkler.

En principio la diferencia principal estriba en que se utilizan elementos estructurales (elementos finitos) de fundación aislados del suelo los cuales están soportados elásticamente por el suelo en los nudos de interconexión con los otros elementos de la fundación. Se utilizan técnicas normales de análisis matricial para definir las matrices de rigidez de los elementos y posteriormente ensambla sobre la diagonal de la matriz de rigidez de toda la fundación las rigideces del suelo, las cuales son linealmente elásticas de acuerdo con el postulado de Winkler.

La rigidez del suelo que se incorpora a la matriz de rigidez de la fundación corresponde al área aferente del nudo multiplicada por el módulo de subrasante, $k_f = A_f k_s$, donde k_f tiene unidades de kg/cm.

Es importante anotar que este modelo tiene el problema de que no hay acople estático entre las rigideces del suelo concentradas en los diferentes nudos. El hecho de que la rigidez del suelo se sume únicamente a la diagonal de la matriz de rigidez de la fundación hace imposible incluir este acople. Bowles sugiere que este problema se puede corregir de la siguiente manera:

(a) Duplicar la rigidez del suelo en los nudos de borde, ó

(b) Zonificar los valores de k_s de tal manera que hay valores mayores en los extremos con una transición gradual a la zona central con los valores mínimos allí.

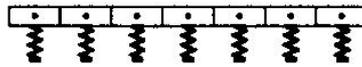
En la misma Ref.7 Bowles presenta dos programas de computador, uno para el análisis de vigas soportadas elásticamente y otro para losas de fundación, también soportadas elásticamente.

3.5 INCONVENIENTES DE LAS METODOLOGIAS PRESENTADAS

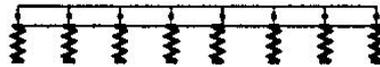
Los dos modelos de interacción suelo-fundación-estructura presentados tienen algunas limitaciones importantes, que aunque algunas de ellas son advertidas por sus autores, no dejan de afectar los resultados obtenidos al seguir la metodología.

3.5.1 Concentración de la Rigidez del Suelo

El modelo de Winkler considera que el suelo produce una reacción a todo lo largo del elemento estructural de fundación, haciendo la reacción proporcional a la deformación del elemento estructural. En los otros dos modelos (Zeevaert y Bowles) la rigidez del suelo se concentra en los nudos de interconexión entre los elementos estructurales de la fundación. En la Figura 3-6(a) puede verse como concentra la rigidez del suelo Zeevaert y en la 3-6(b) Bowles. La rigidez del suelo es proporcional al área aferente.



(a) Modelo de Zeevaert

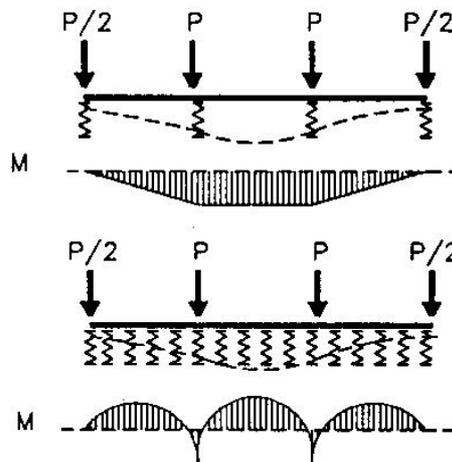


(b) Modelo de Bowles

CONCENTRACION DE LA RIGIDEZ
DEL SUELO EN LOS MODELOS
Figura 3-6

La manera como se ensambla la rigidez del suelo en la matriz de rigidez del modelo es aplicandola en la diagonal, lo cual inhibe el acople entre los diferentes puntos a través del suelo y se logra únicamente por medio de la estructura. Zeevaert soluciona este problema por medio de un proceso iterativo y Bowles por medio de una correcciones a la rigidez del suelo, tal como se indicó anteriormente.

Otro inconveniente importante de la concentración del suelo es las diferencias apreciables que pueden obtenerse en la elástica del elemento estructural por el hecho de que hay una reacción en puntos intermedios. En términos estructurales el error que se introduce es del mismo orden de magnitud que el que tendría una estructura que soporta cargas verticales distribuidas en las vigas, la cual se diseña para únicamente para el efecto de estas cargas concentradas en los nudos. En realidad el modelo original de Winkler en este aspecto conduce a una solución muy cercana al fenómeno real, mientras que los modelos de Zeevaert y Bowles únicamente dan los momentos y cortantes causados por las diferencias de deflexión en los nudos de interconexión. En la Figura 3-7 se indica la variación que se tendría en el diagrama de momentos de una viga por efecto de esta inconsistencia.



EFFECTO EN EL DIAGRAMA DE MOMENTOS CAUSADO POR
LA CONCENTRACION DE LA RIGIDEZ DEL SUELO
Figura 3-7

3.5.2 Rigidez del Suelo en el Borde de la Fundación

En los modelos de Winkler, Zeevaert y Bowles se trata el problema de la condición de frontera de una manera diferente. En Winkler realmente se considera el suelo un fluido que ejerce una presión proporcional a la deflexión del elemento estructural, por lo tanto no hay ningún efecto causado por el suelo adyacente al borde, lo cual es probablemente una de las limitaciones más importantes de este modelo.

Zeevaert corrige esta rigidez por medio de un proceso iterativo en función de la rigidez del suelo al corregir la deformación del suelo de acuerdo con los esfuerzos de contacto. Bowles lo corrige de una manera muy simplista consistente en duplicar la rigidez del suelo en el borde.

3.5.3 Consideración Planar del Fenómeno

En los tres modelos realmente se consideran vigas sobre fundaciones elásticas, por lo tanto la aplicación de las tres metodologías a losas de fundación puede introducir errores graves en los resultados. Bowles presenta una solución para losas macizas de fundación, lo cual no es realmente aplicable a las losas de fundación tal como se utilizan en el medio nacional, además en ese caso la concentración de la rigidez del suelo en los nudos de interconexión puede introducir errores graves.

4. FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO DE INTERACCION

4.1 INTRODUCCION

En el presente Capítulo se presenta un modelo de interacción que permite subsanar las deficiencias anotadas a los modelos existentes de interacción suelo-fundación-estructura en el caso de losas de fundación aligeradas. Este modelo fué desarrollado en la investigación de la Ref.30. Los pasos del desarrollo del modelo son los siguientes:

(a) Se define un modelo matemático basado en la teoría de Elementos Finitos para la losa misma, el cual toma en cuenta las propiedades mecánicas y estructurales de la losa y cuyos elementos están soportados de una forma continua y elástica en el suelo subyacente.

(b) Se propone una metodología que permite tomar en cuenta las propiedades de continuidad del suelo subyacente, como un medio espacio elástico, a diferencia de la teoría tradicional de Winkler, donde la presión que ejerce la cimentación sobre el suelo subyacente solo es proporcional a la deflexión que ocurre en ese punto e independiente de los esfuerzos o deflexiones que ocurren en otros puntos de la cimentación.

(c) Los resultados de los dos puntos anteriores se combinan en un programa de computador, que utiliza el método de los Elementos Finitos, el cual permite analizar y diseñar la losa flotante y a su vez determinar el estado de esfuerzos en el suelo subyacente.

(d) Se presenta una metodología para determinar las deformaciones a largo plazo causadas por consolidación del suelo y sus efectos sobre la losa de fundación.

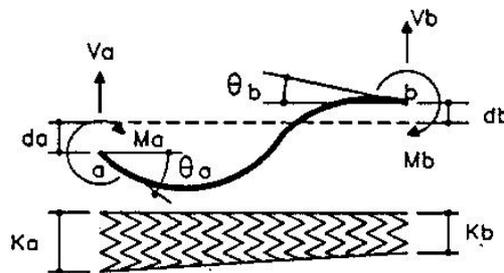
(e) Por último se presenta un procedimiento por medio del cual utilizando un pre-proceso de la estructura de la fundación, es posible determinar la influencia de la deformabilidad del suelo y de la losa de fundación en la superestructura. Esta influencia se evalúa tanto para cargas estáticas como dinámicas, verticales y horizontales, aplicadas a la superestructura y además su efecto sobre el suelo mismo.

4.2 ELEMENTO FINITO PARA PARRILLAS SOPORTADAS ELASTICAMENTE

Los elementos que conforman la losa aligerada de fundación están apoyados sobre el suelo como un medio elástico en toda su longitud, a diferencia de los modelos mencionados en el Capítulo anterior, en los cuales solo hay apoyo sobre el medio de soporte en los nudos de interconexión de los elementos de la fundación.

A continuación se formula el modelo matemático de una elemento que trabaja primordialmente a flexión y que está apoyado elásticamente en toda su longitud, con una rigidez del suelo que varía linealmente de un extremo del elemento al otro. Dado que estos elementos se interconectan conformando una parrilla, el elemento tiene los grados de libertad clásicos para este tipo de elementos.

Supongamos que tenemos un elemento que va desde un extremo inicial que llamamos **a** hasta un extremo final **b**, con un momento de inercia I , módulo de elasticidad E y longitud L , como el mostrado en la Figura 4-1. El elemento está soportado elásticamente sobre un medio elástico cuyo valor de rigidez varía desde k_a , hasta k_b .



VIGA CON SOPORTE ELASTICO CONTINUO
Figura 4-1

El elemento está sometido en su extremo **a** a una deflexión δ_a y a un giro θ_a y análogamente en su extremo **b** a una deflexión δ_b y a un giro θ_b . Para poder mantener esta situación deformada y a su vez estar en equilibrio hay necesidad de someter al elemento en su extremo **a** a un momento M_a y una fuerza cortante V_a y en su extremo **b** a un momento M_b y una fuerza cortante V_b .

Con el fin de poder determinar la matriz de rigidez de este tipo de elemento se procede de la manera convencional, Ref.17, consistente en imponer una deformación unitaria en uno de los grados de libertad de los extremos del elemento a la vez que se mantienen deformaciones iguales a cero en los otros grados de libertad de los extremos. Esto permite, por medio del principio de equilibrio, encontrar los valores de las fuerzas en los extremos necesarias para mantener el equilibrio.

La matriz de rigidez que relaciona los cuatro desplazamientos de los extremos con las cuatro fuerzas en los extremos está planteada a través de la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\{f\}_{4 \times 1} = [k]_{4 \times 4} \{u\}_{4 \times 1} \quad (4-1)$$

Donde:

- $\{f\}$ = vector (4x1) que describe las fuerzas en los extremos de un elemento, en coordenadas locales.
- $\{u\}$ = vector (4x1) que describe las deformaciones en los extremos de un elemento, en coordenadas locales.
- $[k]$ = matriz (4x4) de rigidez de un elemento en coordenadas locales.

Al expandir la Ecuación (4-1) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ M_a \\ V_b \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \theta_a \\ \delta_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Donde:

V_a = fuerza cortante en el extremo a del elemento
 M_a = momento en el extremo a del elemento
 V_b = fuerza cortante en el extremo b del elemento
 M_b = momento en el extremo b del elemento
 δ_a = deflexión en el extremo a del elemento
 θ_a = giro en el extremo a del elemento
 δ_b = deflexión en el extremo b del elemento
 θ_b = giro en el extremo b del elemento

La convención de signos para las fuerzas y deformaciones en los extremos del elemento es la siguiente: (a) Momentos y Giros: Positivos en el sentido contrario a las manecillas del reloj. (b) Fuerzas Cortantes y Deformaciones: Positivas hacia arriba.

De acuerdo con los postulados de los elementos finitos, se impone una deformación al elemento y se determinan los efectos de esta deformación en los extremos, o nudos, donde se quieren describir las propiedades de rigidez del elemento, incluyendo el efecto del medio elástico.

Como un primer paso se determina la ecuación de la elástica del elemento para cada uno de los cuatro casos representados por una deformación unitaria de uno de los cuatro grados de libertad de los extremos, manteniendo en cada caso la deformación de los tres grados de libertad restantes iguales a cero. Esto se logra resolviendo la Ecuación (3-1) para $p(x) = 0$ y obteniendo $y(x)$ para las condiciones de frontera impuestas por las deformaciones y giros en los dos extremos de la viga.

La ecuación de la elástica para las condiciones de frontera iniciales en el extremo a (M_a , V_a , δ_a y θ_a) es la siguiente:

$$y(x) = \delta_a + \theta_a x - M_a/2EI x^2 + V_a/6EI x^3 \quad (4-3)$$

Los resultados obtenidos, son los siguientes:

- Para $\delta_a = 1$, $\theta_a = \delta_b = \theta_b = 0$

$$y_1(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 \quad (4-4)$$

- Para $\theta_a = 1$, $\delta_a = \delta_b = \theta_b = 0$

$$y_2(x) = x - 2x^2/L + x^3/L^2 \quad (4-5)$$

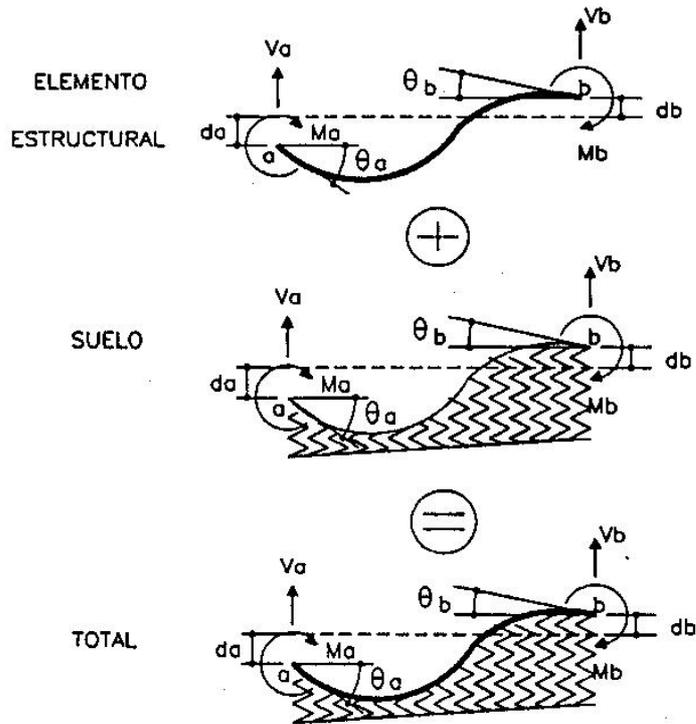
- Para $\delta_b = 1$, $\delta_a = \theta_a = \theta_b = 0$

$$y_3(x) = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \quad (4-6)$$

- Para $\theta_b = 1$, $\delta_a = \theta_a = \delta_b = 0$

$$y_4(x) = -x^2/L + x^3/L^2 \quad (4-7)$$

Aplicando el principio de superposición, el cual es válido en este caso debido a que se trata de relaciones linealmente elásticas, es posible, para efectos de deducir la matriz de rigidez del elemento, dividir los efectos en aquellos de la rigidez propia del elemento y aquellos causados por la rigidez del medio de soporte. Por lo tanto podemos, de acuerdo con lo planteado en la Figura 4-2, obtener los efectos totales como la suma de los efectos de la rigidez propia más los efectos de la rigidez del suelo.



SUPERPOSICION DE LA RIGIDEZ DE LA VIGA
Y LA DEL MEDIO ELASTICO DE SOPORTE
Figura 4-2

Por lo tanto la Ecuación (4-1) se convierte en:

$$\{f\} = \{f_f\} + \{f_s\} = [k] \{u\} = [[k_f] + [k_s]] \{u\} \quad (4-8)$$

Donde:

- $\{f_f\}$ = fuerzas en los extremos del elemento causadas por la rigidez del elemento.
- $\{f_s\}$ = fuerzas en los extremos del elemento causadas por la rigidez del suelo.
- $[k_f]$ = matriz de rigidez del elemento causada por la rigidez del elemento.
- $[k_s]$ = matriz de rigidez del elemento causada por la rigidez del suelo.

La deducción de la matriz $[k_f]$, que corresponde a la matriz convencional de un elemento sometido a flexión, con dos grados de libertad en cada uno de sus extremos, se puede encontrar en numerosos textos de análisis matricial (Ref.17, 20, 25 y 38).

Por lo tanto la parte correspondiente a la rigidez a flexión $[k_f]$ de la matriz $[k]$ es:

$$[k_f] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 - 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & \\ 6EI/L^2 & 4EI/L - 6EI/L^2 & 2EI/L & \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L - 6EI/L^2 & 4EI/L & \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

Para obtener la matriz correspondiente a los efectos del suelo $[k_s]$ se utiliza el principio de Müller-Breslau (Ref.27) el cual dice:

"Las ordenadas de la línea de influencia de cualquier elemento de fuerza (axial, cortante, momento o reacción) de cualquier estructura son proporcionales a la curva de la elástica que se obtiene al remover la restricción correspondiente al elemento de fuerza y reemplazarla por una deformación correspondiente en la estructura que se obtiene al remover la restricción"

Esto quiere decir que $y_1(x)$ es la línea de influencia de la fuerza V_a , que $y_2(x)$ es la línea de influencia del momento M_a , que $y_3(x)$ es la línea de influencia de la fuerza V_b y que $y_4(x)$ es la línea de influencia de M_b .

Además tenemos que la rigidez del suelo varía linealmente a lo largo del elemento, siendo k_a en el extremo a y k_b en el extremo b, por lo tanto se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$k(x) = k_a + (k_b - k_a) x/L \quad (4-10)$$

Donde:

$k(x)$ = función que describe el valor de $k_s b$ a lo largo del elemento
 k_a = valor de $k_s b$ en el extremo a del elemento
 k_b = valor de $k_s b$ en el extremo b del elemento

Para obtener el efecto de la rigidez del suelo expresado en las fuerzas de los extremos del elemento, tomando un elemento diferencial de longitud del elemento, dx , e imponiendo una deformación arbitraria a la viga, equivalente a $y_j(x)$, encontramos que sobre este elemento diferencial, la fuerza que ejerce el suelo es:

$$df = k(x) y_j(x) dx \quad (4-11)$$

ahora, el efecto de este diferencial de fuerza sobre un elemento de fuerza i de uno de los extremos de la viga, de acuerdo con el principio de Müller-Breslau, corresponde a multiplicar df por la línea de influencia del elemento de fuerza i que a su vez es la ecuación de la elástica que se obtiene al imponer una deformación unitaria en el lugar y dirección del elemento de fuerza i o sea $y_i(x)$. Por lo tanto la contribución de df en el elemento de fuerza i causado por la imposición de una deformación $y_j(x)$ es:

$$df_{ij} = y_i(x) df = k(x) y_i(x) y_j(x) dx \quad (4-12)$$

y para obtener el efecto completo de aplicar la deformación $y_j(x)$ en toda la longitud de la viga, en el elemento de fuerza i en el extremo es igual a:

$$f_{ij} = \int_0^L k(x) y_i(x) y_j(x) dx \quad (4-13)$$

por lo tanto los términos k_{ij} de la matriz $[k_s]$ se obtienen de la Ecuación (4-13) porque $k_{s_{ij}} = f_{ij}$. Realizando las correspondientes integrales se obtiene:

$$k_{s11} = \int_0^L k(x) (Y_1(x))^2 dx = (120k_a L + 36k_b L) / 420$$

$$k_{s21} = \int_0^L k(x) Y_1(x) Y_2(x) dx = (15k_a L^2 + 7k_b L^2) / 420$$

$$k_{s31} = \int_0^L k(x) Y_1(x) Y_3(x) dx = (27k_a L + 27k_b L) / 420$$

$$k_{s41} = \int_0^L k(x) Y_1(x) Y_4(x) dx = (-7k_a L^2 - 6k_b L^2) / 420$$

$$k_{s12} = k_{s21}$$

$$k_{s22} = \int_0^L k(x) (Y_2(x))^2 dx = (2.5k_a L^3 + 1.5k_b L^3) / 420$$

$$k_{s32} = \int_0^L k(x) Y_2(x) Y_3(x) dx = (6k_a L^2 + 7k_b L^2) / 420$$

$$k_{s42} = \int_0^L k(x) Y_2(x) Y_4(x) dx = (-1.5k_a L^3 - 1.5k_b L^3) / 420$$

$$k_{s13} = k_{s31}$$

$$k_{s23} = k_{s32}$$

$$k_{s33} = \int_0^L k(x) (Y_3(x))^2 dx = (36k_a L + 120k_b L) / 420$$

$$k_{s43} = \int_0^L k(x) Y_3(x) Y_4(x) dx = (-7k_a L^2 - 15k_b L^2) / 420$$

$$k_{s14} = k_{s41}$$

$$k_{s24} = k_{s42}$$

$$k_{s34} = k_{s43}$$

$$k_{s44} = \int_0^L k(x) (Y_4(x))^2 dx = (1.5k_a L^3 + 2.5k_b L^3) / 420$$

Por lo tanto la matriz $[k_s]$ tiene la siguiente forma:

$$[k_g] = L/420 \times$$

$$\begin{bmatrix} 120k_a+36k_b & 15k_aL+7k_bL & 27k_a+27k_b & -7k_aL-6k_bL \\ 15k_aL+7k_bL & 2.5k_aL^2+1.5k_bL^2 & 6k_aL+7k_bL & -1.5k_aL^2-1.5k_bL^2 \\ 27k_a+27k_b & 6k_aL+7k_bL & 36k_a+120k_b & -7k_aL-15k_bL \\ -7k_aL-6k_bL & -1.5k_aL^2-1.5k_bL^2 & -7k_aL-15k_bL & 1.5k_aL^2+2.5k_bL^2 \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

Si hacemos $k_a = k_b$ obtenemos la siguiente matriz:

$$[k_g] = \frac{kL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Hasta este momento todas las matrices que se han definido hacen referencia a una viga que tiene dos grados de libertad en sus extremos, o sea un desplazamiento vertical y un giro. Dado que las losas de fundación son retículas conformadas por vigas como las descritas a través de las matrices ya desarrolladas, estas retículas tienen en sus nudos tres grados de libertad: un desplazamiento vertical, y dos giros en direcciones horizontales ortogonales. Esto quiere decir que el elemento desarrollado tiene además de los grados de libertad ya descritos (desplazamiento vertical y giro sobre un eje horizontal perpendicular al eje del elemento), una posibilidad de giro sobre el eje longitudinal del elemento, lo cual produce una torsión.

Un elemento sometido únicamente a torsión tiene la siguiente matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JG/L & -JG/L \\ -JG/L & JG/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Donde:

- J = rigidez torsional (cm^4)
- G = Módulo de cortante (kg/cm^2)
- T_a = torsión en el extremo a del elemento
- T_b = torsión en el extremo b del elemento
- ϕ_a = giro en la dirección del eje del elemento, en su extremo a
- ϕ_b = giro en la dirección del eje del elemento en su extremo b

Tanto la torsión como el giro descrito no tienen ninguna interferencia con los otros grados de libertad del elemento, por lo tanto la matriz $[k_f]$ toma ahora la siguiente forma:

$$[k_f] = \begin{bmatrix} JG/L & 0 & 0 & -JG/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -JG/L & 0 & 0 & JG/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

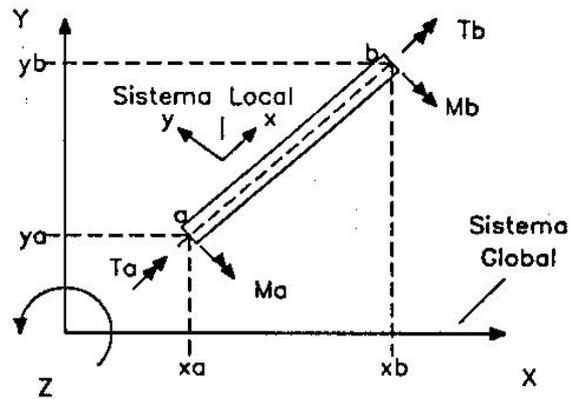
y los vectores de desplazamientos y fuerzas son los siguientes:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \delta_a \\ \theta_a \\ \vdots \\ \phi_b \\ \delta_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad \{f\} = \begin{bmatrix} T_a \\ V_a \\ M_a \\ \vdots \\ T_b \\ V_b \\ M_b \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

En la matriz de rigidez del suelo $[k_s]$ la torsión del elemento no tiene ninguna influencia por lo tanto se convierte en la siguiente matriz al tener los tres grados de libertad en cada extremo:

$$[k_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{s11} & k_{s12} & 0 & k_{s13} & k_{s14} \\ 0 & k_{s21} & k_{s22} & 0 & k_{s23} & k_{s24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{s31} & k_{s32} & 0 & k_{s33} & k_{s34} \\ 0 & k_{s41} & k_{s42} & 0 & k_{s43} & k_{s44} \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

Hasta este momento las matrices presentadas son válidas para el sistema de coordenadas locales del elemento. Debido a que el ensamblaje se debe hacer para un sistema de coordenadas comunes o sea el sistema global, hay necesidad de disponer de una matriz de transformación de coordenadas. Si tenemos un elemento como el mostrado en la Figura 4-3, donde pueden verse el sistema de coordenadas local y el sistema de coordenadas global, y utilizando la convención de letras minúsculas para coordenadas locales y letras mayúsculas para coordenadas globales y definiendo (x_a, y_a) como las coordenadas en planta del extremo a del elemento y (x_b, y_b) como las coordenadas en planta del extremo b, tenemos:



ELEMENTO MOSTRADO EN COORDENADAS GLOBALES Y Φ
 EN COORDENADAS LOCALES
 Figura 4-3

$$\{F\} = [R] \{f\} \quad (4-20)$$

Donde:

$[R]$ = matriz de transformación de sistema de coordenadas, de local a global
 y por el principio de contragradiente podemos probar que:

$$\{u\} = [R]^T \{U\} \quad (4-21)$$

ahora, dado que tenemos la Ecuación (4-1), o sea:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (4-1)$$

reemplazando la Ecuación (4-1) en la Ecuación (4-20), obtenemos:

$$\{F\} = [R] [k] \{u\} \quad (4-22)$$

y substituyendo la Ecuación (4-21) en la Ecuación (4-22):

$$\{F\} = [R] [k] [R]^T \{U\} \quad (4-23)$$

por lo tanto la matriz de rigidez en coordenadas globales es:

$$[K] = [R] [k] [R]^T \quad (4-24)$$

La matriz $[R]$ es (Ref.30):

$$[R] = \begin{bmatrix} c_x & 0 & c_y & 0 & 0 & 0 \\ c_y & 0 & -c_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & 0 & c_y \\ 0 & 0 & 0 & c_y & 0 & -c_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

Donde de acuerdo con la Figura 4-3:

$$c_x = (x_b - x_a) / L \quad (4-26)$$

$$c_y = (y_b - y_a) / L \quad (4-27)$$

4.3 DEFINICION DE LOS VALORES DE k_s APROPIADOS PARA TOMAR EN CUENTA LAS CONDICIONES DE BORDE

El modelo matemático para elementos de losas aligeradas de fundación propuesto en la Sección anterior tiene la posibilidad de tener variaciones lineales del módulo de subrasante k_s a lo largo de su longitud. Esta particularidad se utiliza para tomar en cuenta los efectos de borde de la cimentación, con lo cual se corrige uno de los inconvenientes mayores de las metodologías existentes.

Dado que es posible determinar el estado de esfuerzos en el suelo bajo una losa de fundación cuando se conoce el esfuerzo en el plano de contacto (Sección 2.2.2) y además se puede determinar la deformación en el suelo que se produce al aplicar las cargas en el plano de contacto suelo-fundación (Sección 2.3.1), es posible corregir el valor de módulo de subrasante que habría que utilizar para obtener deflexiones reales de acuerdo con el estado de esfuerzos en el suelo subyacente.

Dado que el valor de k_s proviene en general de ensayos de placa, este valor es válido para los bordes de la losa o en el lugar, dentro de toda la losa, donde el valor de δ_o es menor. Por lo tanto para diferentes sitios de la losa el valor de k_s debe corregirse así:

$$k_{sc} = k_s (\delta_o)_{\min} / \delta_o \quad (4-28)$$

Donde:

$$k_{sc} = \text{valor de } k_s \text{ corregido por efectos de borde (kg/cm}^3\text{)}$$

En la Ecuación (4-28) el valor de k_{sc} es válido para el sitio donde se evaluó δ_o . El valor de $(\delta_o)_{\min}$ es el mínimo valor de δ_o obtenido para todos los puntos de la losa.

En aquellos casos en los cuales k_s es constante con la profundidad, de acuerdo con la Ecuación (2-11) (Ver Sección 2.3.1), la Ecuación (4-28) se convierte en:

$$k_{sc} = k_s (\Delta q_{Tm})_{\min} / \Delta q_{Tm} \quad (4-29)$$

O sea la corrección se puede realizar en función de los incrementos de esfuerzos promedio.

Con los valores de k_{sc} se realiza el análisis utilizando el modelo presentado en la Sección 4.2 y los resultados que se obtienen corresponden a los que se obtienen al considerar las condiciones de

frontera, como es el caso de utilización de un programa de elementos finitos en el cual se analiza la losa con un medio espacio de suelo, también modelado por medio de elementos finitos.

4.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO GLOBAL Y SU SOLUCION

Utilizando los resultados de las Sección 4.2 y 4.3 podemos plantear las ecuaciones de equilibrio de la losa de cimentación. El procedimiento es el siguiente:

(a) Para cada elemento i de la losa:

- se evalúa la matriz de rigidez del elemento correspondiente a los términos de flexión $[k_f]_i$ utilizando la Ecuación (4-17)

- utilizando los valores del módulo de subrasante k_s apropiados para cada extremo del elemento (Sección 4.3) se evalúa la matriz de rigidez del miembro correspondiente a los términos del suelo $[k_s]_i$ utilizando la Ecuación (4-19)

- se encuentra la matriz total del elemento en coordenadas locales así: $[k]_i = [k_f]_i + [k_s]_i$

- se evalúa la matriz de transformación de sistema de coordenadas $[R]_i$ del elemento utilizando la Ecuación (4-25)

- se determina la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales por medio de $[K]_i = [R]_i [k]_i [R]_i^T$

(b) Se plantea la ecuación de equilibrio de toda la estructura así:

$$\{F_L\} = [K_L] \{U_L\} \quad (4-30)$$

Donde:

- $\{F_L\}$ = vector de fuerzas aplicadas en los nudos de interconexión de elementos de la losa de cimentación
- $[K_L]$ = matriz de rigidez de toda la losa de cimentación
- $\{U_L\}$ = vector de desplazamientos de toda la estructura en los nudos de interconexión de los elementos de la losa de cimentación

Esta matriz $[K_L]$ se ensambla por el procedimiento convencional de análisis matricial, sumando en cada término de la matriz todas las contribuciones correspondientes de los elementos que aportan rigidez al grado de libertad.

(c) Se resuelve el sistema de ecuaciones simultaneas expresado por la Ecuación (4-30), teniendo como incógnitas los desplazamientos de la losa $\{U_L\}$. Es importante anotar que la matriz $[K_L]$ no es singular pues las contribuciones de rigidez de la parte correspondiente al suelo de cada uno de los elementos suple la necesidad de que la estructura tenga apoyos.

(d) Utilizando los desplazamientos obtenidos de la solución del paso anterior, los cuales están en coordenadas globales, se obtienen las fuerzas internas en los elementos en coordenadas locales reemplazando la Ecuación (4-21) en la Ecuación (4-1):

$$\{f\} = [k] \{u\} = [k] [R]^T \{U\} \quad (4-31)$$

4.5 RIGIDEZ PARA ANALISIS DE LA SUPERESTRUCTURA

Es evidente que existe una interacción entre la losa de cimentación y la superestructura que se encuentra apoyada sobre la losa. El ideal sería realizar el análisis conjunto de superestructura más losa de cimentación, para lo cual se modela la parte superior utilizando técnicas normales para el tipo de estructura y simplemente se ensambla la matriz $[K_L]$ en los grados de libertad de la base.

Cuando el programa de computador que se utiliza para el análisis de la superestructura tiene la posibilidad de incorporarle rigideces en sus apoyos como es el caso del programa COMBAT (Ref.11), una posibilidad de obtener los valores de estas rigideces desacopladas, consiste en condensar la matriz de rigidez en cada uno de los grados de libertad que son comunes a las dos estructuras.

Esta condensación se realiza por el procedimiento tradicional (Ref.17). Cuando los grados de libertad comunes son todos los grados de libertad de la losa de cimentación, los valores de la rigidez desacoplada corresponden al inverso de los términos de la diagonal de $[K_L]^{-1}$.

4.6 EXTENSION A CIMENTACIONES SOBRE ZAPATAS AISLADAS

El modelo matemático propuesto es extensible a cimentaciones sobre zapatas aisladas. En su utilización en este tipo de fundaciones hay que tener en cuenta los siguientes aspectos especiales:

- El efecto del suelo sobre la rigidez rotacional de la zapata debe tomarse en cuenta:

Si se impone un momento sobre un eje horizontal coincidente con uno de los ejes principales de la zapata, obtenemos la siguiente ecuación:

$$M_{hz} = k_{he} \theta_{hz} \quad (4-32)$$

y

$$M_{bz} = k_{be} \theta_{bz} \quad (4-33)$$

además al aplicar una carga vertical en el centroide de la zapata obtenemos:

$$P_{vz} = k_{vz} \delta_{vz} \quad (4-34)$$

Donde:

- M_{bz} = momento sobre un eje horizontal que pasa por el centroide de la zapata y es paralelo a la dimensión B de la zapata
- M_{hz} = momento sobre un eje horizontal que pasa por el centroide de la zapata y es paralelo a la dimensión H de la zapata
- k_{be} = rigidez rotacional de la zapata con respecto a un eje paralelo a la dimensión B de la zapata
- k_{he} = rigidez rotacional de la zapata con respecto a un eje paralelo a la dimensión H de la zapata
- k_{vz} = rigidez vertical de la zapata
- δ_{vz} = desplazamiento vertical de la zapata
- θ_{bz} = giro de la zapata con respecto a un eje paralelo a la dimensión B de la zapata
- θ_{hz} = giro de la zapata con respecto a un eje paralelo a la dimensión H de la zapata

Los valores de las rigideces se obtienen así:

$$k_{vz} = A_z k_B \quad (4-35)$$

Donde:

A_z = área de la zapata (= B x H)

Para obtener las rigideces rotacionales, se impone un giro unitario a la zapata y se determina el momento sobre el eje, este momento corresponde a la rigidez buscada.

Para el momento paralelo a la dimensión B de la zapata tenemos que el esfuerzo del suelo sobre la zapata en cualquier punto es igual a k_s por la distancia del punto al eje sobre el cual ocurre el giro. Por lo tanto en el extremo de la zapata se tiene un esfuerzo:

$$\sigma = k_s H/2 B \theta_{bz}$$

y en el otro extremo

$$\sigma = - k_s H/2 B \theta_{bz}$$

por lo tanto las resultantes son:

$$R = k_s H/2 B \theta_{bz} H/4 = k_s B \theta_{bz} H^2 / 8$$

y están a H/3 del eje. Dado que $\theta_{bz} = 1$, tenemos que el momento con respecto al eje es:

$$M = 2 k_s B (H^2/8) (H/3) = k_s B H^3 / 12$$

por lo tanto:

$$k_{bz} = k_s B H^3 / 12 = k_s I_{zb} \quad (4-36)$$

y análogamente:

$$k_{hz} = k_s H B^3 / 12 = k_s I_{zh} \quad (4-37)$$

Donde:

I_{zb} = Momento de inercia de la zapata con respecto a un eje paralelo a la dimensión B
 I_{zh} = Momento de inercia de la zapata con respecto a un eje paralelo a la dimensión H

- Las vigas de amarre de la cimentación no deben tener la contribución de rigidez aportada por el suelo, pues no se deben utilizar, en una cimentación apropiadamente diseñada, para transferir esfuerzos al suelo. Por lo tanto el valor del módulo de subrasante debe ser cero para estos elementos.

- La profundidad de evaluación de esfuerzos en el suelo, mencionada en la Sección 2.2.2 (c) debe determinarse con mucho criterio, pues la influencia depende de la dimensión de la zapata (B) y no de la dimensión de toda la fundación, excepto cuando las zapatas están colocadas muy cerca y existe un efecto de grupo de las zapatas y por lo tanto habría que trabajar con una profundidad máxima que sea función del tamaño total de la cimentación en planta.

- Cuando haya zapatas corridas pertenecientes a la zarpa del muro de contención debe tenerse cuidado de incluir la rigidez del muro, el cual actúa en estos casos como una viga de gran altura.

4.7 EVALUACION DE LOS EFECTOS DE CONSOLIDACION DEL SUELO

La deformación o asentamiento que se obtiene en la superficie debido a la consolidación de un suelo cohesivo causada por un aumento en el esfuerzo efectivo en el suelo, se obtiene de acuerdo con lo presentado en la Sección 2.3.3. Según la deformación debida a la consolidación, para cada punto de la losa, es posible corregir los valores del módulo de subrasante con el fin de introducir en el modelo

matemático presentado el efecto de las deformaciones de consolidación en las fuerzas internas dentro de los elementos estructurales de la fundación y la superestructura.

El proceso de corrección para el módulo de subrasante sería el siguiente:

(a) realizar un análisis de la losa utilizando el modelo presentado, corregido por efectos de borde usando el procedimiento de la Sección 4.3. Así se obtienen las deflexiones elásticas del suelo δ_i en cada uno de los puntos de control.

(b) calcular el asentamiento por consolidación s_i en cada uno de los puntos donde se calcularon los esfuerzos utilizando el procedimiento de la Sección 2.3.3.

(c) Dado que el esfuerzo de contacto es el mismo tenemos, de acuerdo con la Ecuación 2-13:

$$q_i = k_{sc} \delta_i \quad (4-38)$$

y

$$q_i = k_{scc} (\delta_i + s_i) \quad (4-39)$$

Donde:

k_{scc} = módulo de subrasante corregido por efectos de borde y efectos de consolidación (kg/cm^3)

δ_i = deflexión elástica en el nudo i (cm)

s_i = asentamiento por consolidación en el nudo i (cm)

entonces el valor de k_{scc} a utilizar en el análisis con consolidación en cada punto i es:

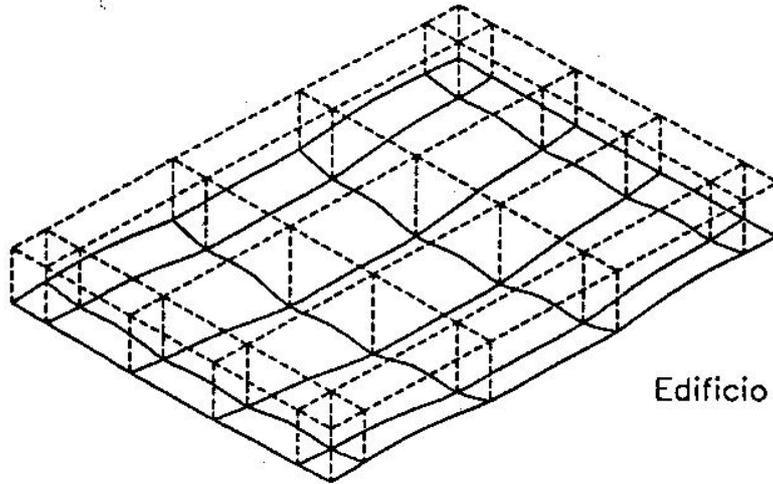
$$k_{scc} = \frac{k_{sc} \delta_i}{(\delta_i + s_i)} \quad (4-40)$$

(d) realizar un nuevo análisis de la losa utilizando esta vez en cada zona el valor obtenido de k_{scc} . Los resultados de este análisis incluyen el efecto en la cimentación del asentamiento por consolidación. Además las deformaciones que se obtengan corresponden a las deflexiones finales incluyendo el asentamiento por consolidación.

(e) el proceso debe repetirse en su totalidad debido a que los asentamientos por consolidación dependen de los esfuerzos de contacto y estos a su vez varían al utilizar los nuevos valores de k_{scc} . Dependiendo de la magnitud de las variaciones obtenidas entre un ciclo y el siguiente se define en que momento no justifica realizar un nuevo análisis.

4.8 EJEMPLO DE RESULTADOS

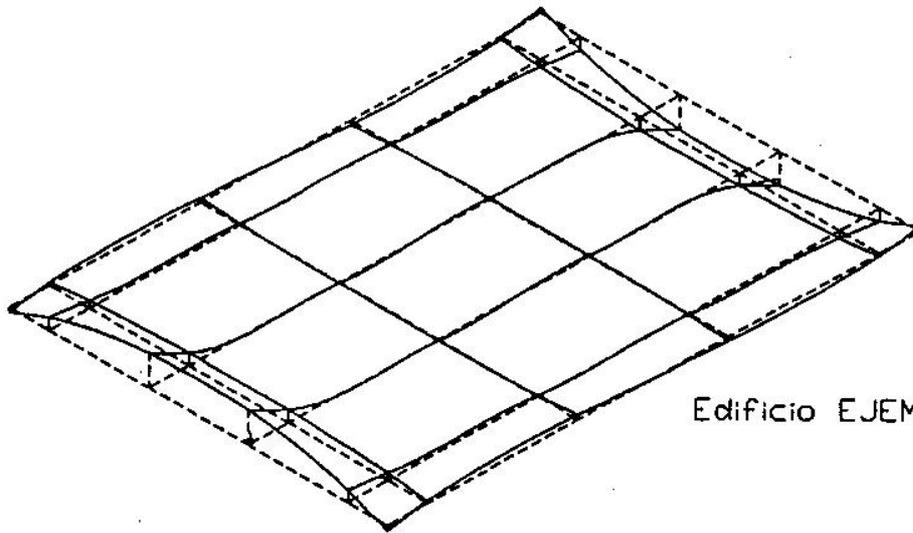
Para efectos demostrativos, se procesó una losa de 1.00 m de altura y de 19.00m por 26.50 m en planta, de un edificio de cinco pisos cimentado sobre suelo blando con un módulo de subrasante de 1 kg/cm^3 . En la Figura 4-4 se muestran las deformaciones de la losa de fundación causadas por la carga muerta de la edificación. En la Figura 4-5 se muestran las deformaciones en la losa causadas por un sismo en la dirección X y en la Figura 4-5 con un sismo en la dirección Y. La escala vertical se ha ampliado 50 veces.



Edificio EJEMPLO

DEFORMACIONES - SUELO : BLANDO CASO MAESTRO : MUERTA

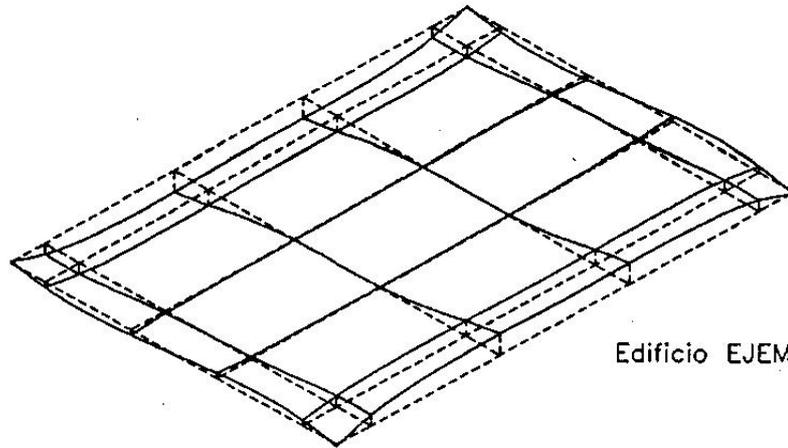
FIGURA 4-4



Edificio EJEMPLO

DEFORMACIONES - SUELO : BLANDO CASO MAESTRO : SISMO-X

FIGURA 4-5



Edificio EJEMPLO

DEFORMACIONES - SUELO : BLANDO CASO MAESTRO : SISMO-Y

FIGURA 4-6

5. REFERENCIAS

- [1] American Concrete Institute, "BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRETE (ACI 318-89)", ACI, Detroit, 1989.
- [2] American Concrete Institute, "SUGGESTED ANALYSIS AND DESIGN PROCEDURES FOR COMBINED FOOTINGS AND MATS", Reporte del Comité ACI-336, ACI Structural Journal, Mayo de 1988.
- [3] Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, "CODIGO COLOMBIANO DE CONSTRUCCIONES SISMO-RESISTENTES", Bogotá, Junio 1984.
- [4] S.C.Ball y J.S.Notch, "COMPUTER ANALYSIS/DESIGN OF LARGE MAT FOUNDATIONS", Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineers, Mayo 1984.
- [5] P.V.Banavalkar y E.J.Ulrich, "REPUBLIC BANK CENTER: STRUCTURAL AND GEOTECHNICAL FEATURES", International Conference on Tall Buildings, Singapur, Octubre 1984.
- [6] J.Boussinesq, "APPLICATIONS DES POTENTIELS A L'ETUDE DE L'EQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES SOLIDES", Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [7] J.E.Bowles, "FOUNDATION ANALYSIS AND DESIGN", 4a. Edición, Mc.Graw-Hill, Nueva York, 1988.
- [8] M.S.Cheung, "A SIMPLIFIED FINITE ELEMENT SOLUTION FOR THE PLATES ON ELASTIC FOUNDATION", Computers and Structures, Vol.8, No.1, 1978.
- [9] Y.K.Cheung y O.C.Zienkiewicz, "PLATES AND TANKS ON ELASTIC FOUNDATIONS - AN APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD", International Journal of Solids and Structures, Vol.1, No.4, 1965.
- [10] R.D.Cook, D.S.Malkus y M.E.Plesh, "CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT ANALYSIS", 3a. Edición, Wiley, Nueva York, 1989.
- [11] Computech Engineering Services, "COMBAT - COMPREHENSIVE BUILDING ANALYSIS TOOL", Berkeley, California, 1983.

- [12] A. Espinosa - Comunicación personal
- [13] S.J.Fenves, R.D.Logcher, S.P.Mauch y K.F.Reinschmidt, "STRESS: A USER'S MANUAL - A PROBLEM-ORIENTED COMPUTER LANGUAGE FOR STRUCTURAL ENGINEERING", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, The MIT Press, 1964.
- [14] D.Q.Fletcher y L.R.Herrmann, "ELASTIC FOUNDATION REPRESENTATION OF CONTINUUM", Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, Enero 1971.
- [15] J.A.Focht, F.R.Khan y J.P.Gemeinhardt, "PERFORMANCE OF ONE SHELL PLAZA DEEP MAT FOUNDATION", Journal of Geotechnical Engineering, American Society of Civil Engineers, Mayo 1978.
- [16] O.K.Fröhlich, "LA REPARTICION DE PRESIONES", traducción de la primera edición en alemán, Tipografía Artística, Madrid, 1942
- [17] L.E.García, "NOTAS DE ANALISIS MATRICIAL", Universidad de los Andes, Bogotá, 1980.
- [18] L.E.García y L.A.Ruiz, DISEÑO LIMITE DE VIGAS DE AMARRE PARA CIMENTACIONES", Primeras Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, 1975.
- [19] M.Hetenyi, "BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION", The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946.
- [20] S.M.Holzer, "COMPUTER ANALYSIS OF STRUCTURES - MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS STRUCTURED PROGRAMMING", Elsevier, 1985.
- [21] L.E.Huertas, "ELEMENTOS FINITOS APLICADOS A VIGAS FLOTANTES EN MEDIO ELASTICO", Sextas Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, 1985.
- [22] A.D.Kerr, "ELASTIC AND VISCOELASTIC FOUNDATION MODELS", Journal of Applied Mechanics, Transactions American Society of Mechanical Engineers, Marzo 1964.
- [23] T.W.Lambe y R.V.Whitman, "SOIL MECHANICS", Wiley, Nueva York, 1969.
- [24] Microsoft, "QuickBASIC 4.5", Microsoft Corporation, Redmont Wa., 1988
- [25] W.McGuire y R.H.Gallagher, "MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS", Wiley, 1979.
- [26] F.Montoya, "DISEÑO OPTIMO DE VIGAS DE AMARRE PARA CIMENTACIONES", Tesis de Pregrado, (Profesor Asesor: L.E.García), Universidad de los Andes, Bogotá, 1976.
- [27] H.Müller-Breslau, "DIE NEUEREN METHODEN DEL FESTIGKEITSLEHRE UND DER STATIK DER BAUKONSTRUKTIONEN", Berlin, 1886.
- [28] N.M.Newmark, "INFLUENCE CHARTS FOR COMPUTATION OF STRESSES IN ELASTIC FOUNDATIONS", Engineering Experiment Station Bulletin No.338, University of Illinois, Urbana, 1942.
- [29] R.B.Peck, W.E.Hanson y T.H.Thornburn, "FOUNDATION ENGINEERING", 2a Edición, Wiley, 1974.
- [30] A.Pérez, "ANALISIS Y DISEÑO DE LOSAS DE FUNDACION", Tesis de Postgrado MIC-88-II-09, (Profesores asesores: A. Espinosa y L.E.García), Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de los Andes, Bogotá, Enero de 1989.
- [31] A.Porto, "COMPARACION ENTRE ZAPATAS AISLADAS Y LOSA DE CIMENTACION", Tesis de Pregrado, (Profesor Asesor: L.E.García), Universidad de los Andes, Bogotá, 1976.
- [32] L.A.Ruiz, "DISEÑO LIMITE DE VIGAS DE AMARRE PARA CIMENTACIONES", Tesis de Pregrado, (Profesor Asesor: L.E.García), Universidad de los Andes, Bogotá, 1975.
- [33] S.N.Shulka, "A SIMPLIFIED METHOD FOR DESIGN OF MATS ON ELASTIC FOUNDATIONS", ACI Journal, American Concrete Institute, Septiembre 1984.
- [34] K.Terzaghi, "EVALUATION OF COEFFICIENTS OF SUBGRADE REACTION", Géotechnique, Vol.5, No.4, 1955.
- [35] S.J.Timoshenko, "STRENGTH OF MATERIALS", 3a. Edición, Van Nostrand, 1955.
- [36] B.Y.Ting y E.F.Mockry, "BEAM ON ELASTIC FOUNDATION FINITE ELEMENT", Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineers, Octubre 1984.
- [37] Universidad de los Andes, "BASES REGIONALES PARA ELABORAR CODIGOS DE VIVIENDA SISMORESISTENTE DE BAJO COSTO", Centro de Investigaciones de la Facultad de Ingeniería CIFI, Bogotá, Noviembre de 1990.
- [38] J.Uribe, "ANALISIS DE ESTRUCTURAS", Universidad de los Andes, Ediciones Uniandes, Bogotá, 1991.
- [39] H.Vanegas, "RECOMENDACIONES SOBRE EL DISEÑO DE VIGAS DE AMARRE", Tesis de Pregrado, (Profesor Asesor: L.E.García), Universidad de los Andes, Bogotá, 1977.
- [40] A.B.Vesic, "BENDING OF BEAMS RESTING ON ISOTROPIC ELASTIC SOLID", Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, Abril 1961.

- [41] H.M.Westergaard, "A PROBLEM OF ELASTICITY SUGESTED BY A PROBLEM OF SOIL MECHANICS: SOFT MATERIAL REINFORCED BY NOUMEROUS STRONG HORIZONTAL SHEETS", en "CONTRIBUTIONS TO THE MECHANICS OF SOLIDS", Stephen Timoshenko 60th Aniversary Volume, McMillan, 1938.
- [42] E.Winkler, "DIE LIHRE VON DEL ELASTIZITAT UN FESTIGKEIT", Praga, 1867.
- [43] G.Winter y A.H.Nilson, "DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES", 9a Edición, McGraw-Hill, 1979
- [44] T.Y.Yang, "A FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PLATES ON A TWO PARAMETER FOUNDATION MODEL", Computers and Structures, Vol.2, No.,4, 1972
- [45] L.Zeevaert, "ISE - INTERACCION SUELO ESTRUCTURA DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES Y PROFUNDAS", Edit. Limusa, Mexico D.F., 1980.
- [46] L.Zeevaert, "FOUNDATION ENGINEERING FOR DIFFICULT SUBSOIL CONDITIONS", 2a. Edición, Van Nostrand, Nueva York, 1983.
- [47] H.Zimmermann, "DIE BERECHNUNG DES EISENBAHNOBERBAUES", Berlín, 1888.